College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

大学文科
高等数学题解

（上册）

姚孟臣　张清允　编著

高等教育出版社

大学文科高等数学题解

上 册

姚孟臣 张清允 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科高等数学题解.上/姚孟臣,张清允编著.
北京:高等教育出版社,2003.6
ISBN 7-04-012763-6

Ⅰ.大… Ⅱ.①姚…②张… Ⅲ.高等数学-高等
学校-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037541 号

编辑	李陶	**策划**	李艳馥	**封面设计**	于涛
版式设计	唐开宇	**责任校对**	唐开宇	**责任印制**	韩刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网址**	http://www.hep.edu cn
总机	010－82028899		http://www www hep com cn

经销	新华书店北京发行所		
印刷	天津新华印刷一厂		
开本	850×1168 1/32	**版次**	2003年8月第1版
印张	10 125	**印次**	2003年8月第1次印刷
字数	250 000	**定价**	13.00元

内容简介

本书是与《大学文科高等数学》(姚孟臣主编,高等教育出版社出版)配套的辅导教材之一,给出了该书中大部分习题的分析与解答,并针对目前文科学生的实际需要,适量增加了选择、填空等其他题型的习题。

本书分上、下两册出版,上册的内容包括微积分、级数和微分方程,下册包括线性代数、概率论和数理统计。书的每一章中都含内容提要、习题、分析及解答。

本书在编写时考虑到各方面的需要,内容上较为全面。因此,读者在使用本书进行复习时,应参照有关的《教学大纲》和《考试大纲》进行。

本书可以作为普通高等院校文科各个专业的学生以及参加全国高等教育自学考试、学历文凭考试的考生学习微积分、线性代数、概率论与数理统计课程的参考书。也可以满足成人高等教育以及高等职业教育各个专业的学生学习相关课程教学辅导的需要。

前　言

文科类高等数学是为适应现代科学文理渗透的趋势而设置的一门基础数学理论与应用数学方法相结合的课程，其教学内容和教学方法都应该具有明显的文科特色。针对目前文科学生的实际需要、知识结构和思维特点，我们编写了《大学文科高等数学题解》一书，它是《大学文科高等数学》配套的辅导教材之一。

我们认为，解题是学好数学的一个必要环节。通过解题可以加深对概念的理解，掌握各种解题的方法和技巧，进一步巩固已学到的知识。考虑到一方面教材一般不可能用很大的篇幅来介绍解题的方法和技巧，而且目前大多数院校和社会上各类数学的考试仍然采用笔试的形式；另一方面由于各种原因，很多学生感到解题是一件很困难的事情，特别是对于学习高等数学的文科学生来说更是如此。因此《大学文科高等数学题解》在内容选取和结构设计上都作了较为周密的考虑。本书分上、下两册出版，上册的内容包括一元和多元微积分，下册包括线性代数、概率论和数理统计。

为了使得学生通过一定数量题目的练习，会更好地理解和掌握有关的基本概念和基本解题的方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心。在使用本书时应按照以下四个步骤学习才会有较大的收益：

1. 通过审题来正确理解题意。特别是概率统计部分，首先把题目的已知和要求的是什么弄清楚，而那种只有看完题解后才能正确理解题意的做法是万万不可取的。

2. 分析题目来确定主要考核知识点。解答该题时要用到哪些

知识点，需要哪些公式或定理要事先明确，这种训练是十分必要的。

3. 选择适当的方法与技巧。解题技巧的掌握不仅要“看”，更重要的是“学”，即动手来解题，所谓“熟能生巧”就是这个道理。对于概率统计部分，我们认为主要是掌握解题的各种方法。

4. 学习解题格式及关键步骤表述。解题格式是大多数同学最容易忽视的一个问题，学习必要解题格式也是十分重要的。在各类考试中，必要的解题格式以及写出关键步骤是我们评判的重要标准，也是今后学习和工作中所需要的。

本书在编写时考虑到各方面的需要，内容上较为全面。因此，读者在使用本书进行复习时，应参照有关的《教学大纲》和《考试大纲》进行。

本书适合文科各个专业以及参加自学考试、学历文凭考试及其他各类考试的高等数学课程的需要。也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业的微积分、线性代数、概率论与数理统计课教学辅导的需要。

由于编者水平和精力所限，题解中难免有错误和疏漏之处，恳请读者和教授此课的老师们批评指正。

编　者

2003年2月6日

于北京大学中关园

目　　录

第一部分　微　积　分

第一部分 微 积 分

第一章 函数、极限与连续

一、内容提要

(一) 重要概念及性质

1. 集合

所谓**集合**就是按照某些规定能够识别的一些具体对象或事物的全体. 构成集合的每一个对象或事物叫做集合的**元素**.

如果一个集合中只有有限多个元素，那么这种集合叫做**有限集**. 如果集合不是由有限个元素组成，那么这种集合叫做**无限集**.

通常集合用大写字母 A,B,C 表示，其元素用小写字母 a,b,c 表示.

设 A,B 是两个集合. 如果 B 的每一个元素对应于 A 的惟一的元素，反之 A 的每一个元素对应于 B 的惟一的元素，那么就说在 A 和 B 的元素之间建立了一一对应关系，并称 A 与 B **等价**，记作

$$A \sim B.$$

与自然数集 $\mathbf{N}$ 等价的任何集合，称为**可列集**. 显然，一切可列集彼此都是等价的. 今后我们常称这类集合中元素的个数为可列个(或可数个)，并把有限个或可列个统称为**至多可列个(或至多可数个)**.

集合分类如下：

$$\text{集合}\begin{cases}\text{有限集}\\ \text{无限集}\begin{cases}\text{可列集}\\ \text{不可列集}\end{cases}\end{cases}$$

2. 区间与邻域

所谓**区间**就是介于某两点之间的一切点所构成的集合，这两个点称为区间的**端点**. 如果两个端点都是定数，称此区间为有限的，否则称为无限的. 常见的有限区间有：设 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，我们把集合 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；把集合 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$；把集合 $\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$ 称为**半开半闭区间**，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 对于**无限区间**，例如 $\{x\,|\,x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$；$\{x\,|\,x<a\}$，记作 $(-\infty,a)$；$\{a\,|\,a\in\mathbf{R}\}$，记作 $(-\infty,+\infty)$. 类似地，还有 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$.

设 $a\in\mathbf{R}$，$h\in\mathbf{R}$ 且 $h>0$. 称集合

$$\{x\,|\,|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**邻域**，记作 $N_h(a)$，其中 h 为**邻域半径**；称集合

$$\{x\,|\,0<|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**空心邻域**，记作 $N_h(\bar{a})$. 当不必指明邻域半径时，我们用 $N(a)$，$N(\bar{a})$ 表示 a 的邻域和 a 的空心邻域. 称集合

$$\{x\,|\,a\leqslant x<a+h\}\ \text{和}\ \{x\,|\,a-h<x\leqslant a\}$$

为 a 的**右邻域**和**左邻域**，记作 $N_h^+(a)$ 和 $N_h^-(a)$. 若上述集合除去 a 点，就称为 a 的**空心右邻域**和**空心左邻域**，记作 $N_h^+(\bar{a})$ 和 $N_h^-(\bar{a})$. 不必指明邻域半径时，记号中可省略下角标 h.

3. 函数

定义 1.1 设 X 是一个给定的数集，f 是一个确定的对应关系，如果对于 X 中的每一个数 x，通过 f 都有 $\mathbf{R}$ 内的惟一确定的一个数 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 X 到 $\mathbf{R}$ 的**函数关**

系，简称**函数**，记为

$$f: X \to \mathbf{R} \quad 或 \quad f(x)=y.$$

我们把按照函数 f 与 $x\in X$ 所对应的 $y\in\mathbf{R}$ 叫做 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y=f(x)$，并把 X 叫做函数 f 的**定义域**，用 D_f 表示，而 f 的全体函数值的集合

$$\{f(x)\,|\,x\in X\}$$

叫做函数 f 的**值域**，通常用 Y 来表示，即

$$Y=\{f(x)\,|\,x\in X\}.$$

今后我们把函数用

$$y=f(x),\quad x\in X$$

来表示，并说 y 是 x 的函数，其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. 由于在我们讨论的范围内，函数 f 和函数值 $f(x)$（即 y）没有区分的必要，因此通常把 y 叫做 x 的函数.

所谓**单值函数**就是对于 X 中的每一个值 x，都有一个而且只有一个 y 的值与之对应的函数. 对于 X 中的某个 x 值有多于一个 y 的值与之对应的函数，叫做**多值函数**.

函数有四个基本性质，它们分别是：单调性、有界性、奇偶性和周期性.

（1）奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 为一个对称数集，即任给 $x\in X$ 时，有 $-x\in X$. 若函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

（2）单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$，$x\in X$，任给 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $(a,b)\subset X$. 若 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在(a,b)内是**递增**(**递减**)的;又若 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在(a,b)内是**不减**(**不增**)的.

递增函数或递减函数统称为**单调函数**.同样我们可以定义在无限区间上的单调函数.

(3) 有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$在 X 上有定义,若存在 $M_0>0$,对于任意的 $x\in X$ 使得$|f(x)|\leqslant M_0$,则称 $f(x)$在 X 上是**有界的**;否则称 $f(x)$在 X 上是**无界的**.

(4) 周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$,$x\in \mathbf{R}$.若存在 $T_0>0$,对于任意的 $x\in \mathbf{R}$ 使得 $f(x+T_0)=f(x)$,则称 $f(x)$是**周期函数**,T_0 为其**周期**.

由定义可知,$kT_0(k\in \mathbf{N})$都是它的周期,可见一个周期函数有无穷多个周期.若在无穷多个周期中,存在最小的正数 T,则称 T 为 $f(x)$的**最小周期**,简称**周期**.

4. 反函数

定义 1.6 给定函数 $y=f(x)(x\in X,y\in Y)$.如果对于 Y 中的每一个值 $y=y_0$ 都有 X 中惟一的一个值 $x=x_0$,使得 $f(x_0)=y_0$,那么我们就说在 Y 上确定了 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Y).$$

通常我们称函数 $y=f(x)$为**直接函数**,而用符号“f^{-1}”表示新的函数关系.

习惯上我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因而常把函数 $y=f(x)$的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$的形式.从而 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的,这是因为这两个函数因变量与自变量互换的缘故.

5. 复合函数

定义 1.7 设 $y=f(u)(u\in U)$，$u=g(x)(x\in X, u\in U_1)$. 若 $U_1\subset U$，则称 $y=f[g(x)](x\in X)$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**，有时记为 $f\circ g$，并称 u 为**中间变量**.

两个以上的函数也可以进行复合运算，并且满足结合律，即

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

需要指出的是，复合运算与四则运算不同，它没有交换律，即若 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都存在，一般来说

$$f\circ g\neq g\circ f.$$

6. 初等函数

我们所研究的各种函数，特别是一些常见的函数都是由几种最简单的函数构成的，这些最简单的函数就是在初等数学中学过的**基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数**.

定义 1.8 基本初等函数经过有限次加、减、乘、除、复合运算所得到的函数，称为**初等函数**.

7. 分段函数

定义 1.9 由两个或两个以上的分析表达式表示的函数，称为**分段定义的函数**，简称为**分段函数**.

8. 数列的极限

(1) 数列的定义

定义 1.10 按照一定顺序排列的可列个数：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**，记为 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为第 n 项或通项，n 称为 x_n 的序号.

(2) 数列的极限

定义 1.11(数列极限) 给定数列 $\{x_n\}$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个非负整数 N，使得当 $n>$

N 时，不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 n 趋于无穷时 $\{x_n\}$ 的极限**，并称 $\{x_n\}$ **收敛于** A. 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \to A(n \to \infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，那么我们就称 $\{x_n\}$ 是**发散**的.

9. 函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

定义 1.12($x \to +\infty$ 时的函数极限)　给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 X，使得当 $x > X$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 x 趋于正无穷时 $f(x)$ 的极限**，并称 $f(x)$ **收敛于** A. 如果函数 $f(x)$ 没有极限，那么我们就称 $f(x)$ 是**发散**的.

定义 1.13($x \to -\infty$ 时的函数极限)　给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 X，使得当 $x < -X$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 x 趋于负无穷时 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to -\infty).$$

定义 1.14($x \to \infty$ 时的函数极限)　给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 X，使得当 $|x| > X$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 x 趋于无穷时 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to \infty).$$

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

定义 1.15($x \to a$ 时函数的极限)　给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 δ，使得 $x \in N_\delta(\bar{a})$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A 为 x 趋于 a 时(或在 a 点处) $f(x)$ 的极限，并称 $f(x)$ **在 a 点收敛于** A. 如果函数 $f(x)$ 在 a 点没有极限，那么我们就称 $f(x)$ **在 a 点是发**

散的.

(3) 单侧极限

定义 1.16 设函数 $f(x)$在 $N^+(\bar{a})$上有定义. 如果对于任意给定的正数 ε,不论它怎样小,都存在着这样一个正数 δ,使得 $x\in N_\delta^+(\bar{a})$时,不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 都成立. 那么我们就称 A 为$f(x)$在 a 点的**右极限**,记作

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to a + 0),$$

右极限 A 也可简记为 $f(a+0)$.

同样可以定义函数 $f(x)$在 a 点的**左极限** $f(a-0)$.

可以证明: 函数 $f(x)$在 a 点处极限存在的充要条件是$f(x)$在 a 点处的两个单侧极限都存在并且相等,即

$$\lim_{x\to a}f(x) = A \Leftrightarrow f(a - 0) = A = f(a + 0).$$

10. 极限的性质

(1) **惟一性** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则极限值是惟一的.

(2) **有界性** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则在 $N(\bar{x}_0)$内 $f(x)$是有界的;若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在,则数列$\{x_n\}$有界.

(3) **保号性** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在 x_0 的某邻域(点 x_0 除外),在此邻域内有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且在 x_0 的某邻域内(点 x_0 除外)$f(x)>0$(或 $f(x)<0$),则必有 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

11. 无穷小量与无穷大量

(1) **无穷小量**

定义 1.17 以零为极限的变量称为无穷小量,即若

$$\lim y = 0,$$

则称 y 为一**无穷小量**.

无穷小量的几个性质.

性质 1 两个无穷小量的和是无穷小量.

性质 2 无穷小量与有界变量的积是无穷小量.

性质 3 变量以 A 为极限的充要条件是变量为 A 与无穷小量的和.

(2) 无穷大量

定义 1.18 在某一个变化过程中,绝对值无限增大的变量,称为**无穷大量**.

在某一个变化过程中

① 若 y 是无穷大量,则$\frac{1}{y}$是无穷小量;

② 若 y 是无穷小量,且 $y\neq0$,则$\frac{1}{y}$是无穷大量.

(3) 无穷小量的阶

设 $\lim f=0,\lim g=0,l,k$ 为常数.

① 如果

$$\lim \frac{f}{g} = l \neq 0,$$

则称 f 与 g 是**同阶**无穷小量,记作

$$f \sim lg,$$

特别当 $l=1$ 时,称 f 与 g 是**等价**无穷小量;

② 如果

$$\lim \frac{f}{g} = 0,$$

则称 f 是 g 的**高阶**无穷小量(或称 g 是 f 的**低阶**无穷小量),记作

$$f = o(g);$$

③ 如果

$$\lim \frac{f}{g^k} = l \neq 0(k > 0),$$

则称 f 是关于 g 的 **k 阶**无穷小量.

关于等价无穷小量有一个很有用的性质:设 $f_1\sim f_2,g_1\sim g_2$,

且 $\lim(f_2/g_2)$存在，则

$$\lim \frac{f_1}{g_1} = \lim \frac{f_2}{g_2}.$$

12. 函数连续性

定义 1.19 称函数 $f(x)$在点 x_0 处是**连续**的，如果它满足：

(1) $f(x)$在 x_0 处有定义；

(2) $f(x)$在 x_0 处有极限存在，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A;$$

(3) $f(x)$在 x_0 处的极限值等于函数值，即

$$A = f(x_0).$$

并称 x_0 为 $f(x)$的**连续点**. 否则就说函数在 x_0 是**间断的**，并称 x_0 为 $f(x)$的**间断点**.

若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点处都连续，则称 $f(x)$在开区间(a,b)内是连续的；若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，并且在区间的左端点 a 处是右连续的（即 $f(a^{+0})=f(a)$），在区间的右端点 b 处是左连续的（即 $f(b^{-0})=f(b)$），则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上是连续的. 若一个函数 $f(x)$在它的定义域上的每一点都是连续的，则称它是连续函数.

定义 1.20 (1) 如果函数 $f(x)$在 x_0 点的左右极限都存在，但不都等于该点的函数值，那么就称 x_0 为**第 I 类间断点**；

(2) 如果函数 $f(x)$在 x_0 点的左右极限中至少有一个不存在，那么就称 x_0 为**第 II 类间断点**.

在第 I 类间断中，如果函数在间断点左、右极限存在并相等，但不等于该点的函数值，那么我们可以补充或重新定义函数在间断点的值，使得函数在该点变成是连续的，这种间断点我们称为**可去间断点**.

间断点的分类如下表：

第一类间断点		第二类间断点	
$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$均存在		$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$至少有一个不存在	
$f(x_0-0)=f(x_0+0)$	$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$	$f(x_0-0)$,$f(x_0+0)$至少一个为∞	除前面情况以外
可去间断点	跳跃间断点	无穷间断点	振荡间断点

（二）重要定理及公式

定理 1.1(反函数存在定理) 单调函数必有反函数.

定理 1.2 若函数 $f(x)$与 $g(x)$在同一点 $x=x_0$ 处是连续的，则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad f(x)/g(x)(g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 处也是连续的.

定理 1.2 可以扩充到有限多个函数的情况：在点 $x=x_0$ 处有限多个连续函数的和，差，积，商(在商的情况下，要求分母不为 0)在点 $x=x_0$ 处也都是连续的.

定理 1.3 设有两个函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$. 若函数 $u=\varphi(x)$在点 $x=x_0$ 处连续，函数 $y=f(u)$在点 $u_0=\varphi(x_0)$处连续，则复合函数

$$y=f[\varphi(x)]$$

在点 $x=x_0$ 处也连续.

定理 1.4 单调连续函数的反函数也是单调连续的.

下面给出在闭区间上连续的函数所具有两个重要性质，这些性质常常用来作为分析问题的理论论据.

定理 1.5(最大最小值定理) 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$一定有最大值与最小值，即存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$f(x)\leqslant f(x_1)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\},$$

$$f(x) \geqslant f(x_2) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}.$$

x_1, x_2 分别称为函数的最大值点与最小值点.

定理 1.6（中间值定理） 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，η 为 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个值，则至少存在一点 $c \in [a,b]$，使得

$$f(c) = \eta.$$

推论 1 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $c \in [a,b]$ 使得

$$f(c) = 0.$$

推论 2 在闭区间上连续的函数一定可以取得最大值与最小值之间的一切值.

（三）重要方法

1. 集合的表示法与基本运算

(1) 表示法

集合一般有两种表示法：**列举法和示性法**. 所谓列举法就是把集合的元素都列举出来. 所谓示性法就是给出集合元素的特性. 一般用

$$A = \{a \mid a \text{ 具有的性质}\}$$

来表示具有某种性质的全体元素 a 构成的集合.

(2) 基本运算

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**，即由 A 与 B 的全体元素构成的集合，记作 $A \cup B$.

并集具有以下的简单性质：

(1) $(A \cup B) \supset A$；

(2) $(A \cup B) \supset B$.

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**，即由 A 与 B 的公共元素构成的集合，记作 $A \cap B$. 若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B **互不相交**.

交集具有以下的简单性质：

(1) $(A\cap B)\subset A$；

(2) $(A\cap B)\subset B$.

2. 求函数的定义域、值域的计算

求函数的定义域就是找出解析表达式自变量的取值范围，主要有以下几种情况：

(1) 分式的分母取值不为零；

(2) 偶次根的根底式为非负数；

(3) 对数符号下的真数式子只能是正数；

(4) 反正弦函数、反余弦函数符号下的式子在$[-1,1]$上取值；

(5) 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围的总和；

(6) 由几个函数经过四则运算而构成的函数，其定义域是各个函数定义域的公共部分.

例 1 求下列函数的定义域，并用区间表示：

(1) $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{\ln(2x-3)}$；

(2) $f(x)=\ln(2^x-4)+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

分析 要使函数有意义，必须而且只需

(1) 偶次根号中被开方数 $16-x^2\geqslant 0$，对数函数中真数 $2x-3>0$，分式中分母 $\ln(2x-3)\neq 0$，定义域是各不等式解的交集.

(2) 真数$2^x-4>0$，且2^x是递增的，反正弦函数中$\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$.

解 (1) 由

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ 2x-3>0,\\ 2x-3\neq 1\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}|x| \leqslant 4, \\ x > \dfrac{3}{2}, \\ x \neq 2,\end{cases} \quad 即 \begin{cases}-4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x > \dfrac{3}{2}, \\ x \neq 2.\end{cases}$$

所以 $D_f=\left(\dfrac{3}{2},2\right)\cup(2,4]$.

(2) 由

$$\begin{cases}2^x - 4 > 0, \\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right| \leqslant 1\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}2^x > 2^2, \\ -1 \leqslant \dfrac{2x-1}{7} \leqslant 1,\end{cases} \quad 即 \begin{cases}x > 2, \\ -3 \leqslant x \leqslant 4.\end{cases}$$

所以 $D_f=(2,4]$.

例 2 已知

$$f(x) = \begin{cases}2x, & 0 < x \leqslant 1, \\ x+1, & 1 < x \leqslant 4,\end{cases}$$

$$g(x) = f(x^2) + f(3+x),$$

求 $g(x)$的定义域.

解 分段函数的定义域是各个定义区间的并集,所以 $f(x)$的定义域 $D_f=(0,1]\cup(1,4]$,它表示 $f(\quad)$的自变量的取值范围为 $(0,4]$,$f(x^2)$的自变量是 x^2,$f(3+x)$的自变量是$(3+x)$,因此由

$$0<x^2\leqslant 4,$$

有
$$-2\leqslant x<0 \quad 或 \quad 0<x\leqslant 2;$$

由
$$0<3+x\leqslant 4$$

有
$$-3<x\leqslant 1.$$

可见,$f(x^2)$的定义域是$[-2,0)\cup(0,2]$. 而 $f(3+x)$的定义域是

$(-3,1]$.

因为 $g(x)$ 的定义域是上述两个定义域的交集，所以 $g(x)$ 的定义域是 $\{[-2,0)\cup(0,2]\}\cap(-3,1]$ 即 $[-2,0)\cup(0,1]$.

注意 这里容易产生的错误是将 $f(x)$ 的定义域就看作 x 的范围：$0<x\leqslant 4$，所以 $0<x^2\leqslant 16$，而 $3<3+x\leqslant 7$. 因此，错误地导出 $f(x^2)$ 的定义域是 $(0,16]$，$f(3+x)$ 的定义域是 $(3,7]$.

3. 建立函数关系

为了解决实际问题，需要先确定问题中的自变量和因变量以及相互间的依赖关系（即函数关系），并将这种关系表示出来，再利用适当的数学方法加以分析和解决.

例 3 要造一个底面为正方形，容积为 500 m^3 的长方体无盖蓄水池，设水池四壁和底面每平方米造价均为 a 元，试将蓄水池的造价 y（单位：元）表为底边长 x（单位：m）的函数.

解 由题意可知，长方体水池的高 $h=\dfrac{500}{x^2}$ m. 故

$$y=ax^2+4axh=ax^2+\frac{2000}{x}a$$

$$=a\left(x^2+\frac{2000}{x}\right),\quad x\in(0,+\infty).$$

例 4 设 1982 年底我国人口为 10.3 亿，如果不实行计划生育政策，按照年均 2% 的自然增长率计算，那么到 2000 年底，我国人口将是多少？

解 已知 1982 年底人口为 10.3 亿，设 t 年后人口为 y.

1 年后人口为

$$10.3+10.3\times 2\%=10.3\times(1+2\%),$$

2 年后人口为

$$10.3\times(1+2\%)+10.3\times(1+2\%)\times 2\%$$
$$=10.3\times(1+2\%)^2,$$

…………

那么 t 年后,我国人口为

$$y = 10.3 \times (1 + 2\%)^t,$$

即

$$y=10.3\times1.02^t.$$

到 2000 年底,即 18 年后,我国人口为

$$y = 10.3 \times 1.02^{18},$$

两边取常用对数,得

$$\begin{aligned}\lg y &= \lg 10.3 + 18\lg 1.02 \\ &= 1.0128 + 18 \times 0.0086 = 1.1676,\end{aligned}$$

查反对数表,得

$$y = 14.71(\text{亿}).$$

一般地,设某地某年末人口为 p_0,人口自然增长率为 r,那么 t 年后的人口 p 为

$$p = p_0(1 + r)^t.$$

4. 直接函数的反函数的求法

如果 $y=f(x)$满足一定的条件,求 $y=f(x)$的反函数,一般先由 $y=f(x)$解得 $x=f^{-1}(y)$,然后再换变量得 $y=f^{-1}(x)$.

例 5 求 $y=f(x)=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$的反函数.

解 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}=\log_4 2\sqrt{x}$将它看作方程,解方程

$$2\sqrt{x} = 4^y$$

得到

$$x=4^{2y-1},$$

再换变量,得到

$$y = 4^{2x-1}.$$

因此,反函数 $f^{-1}(x)=4^{2x-1}$.

5. 极限的四则运算

若变量 f 和 g 收敛,且

$$\lim f = A, \quad \lim g = B,$$

则

(1) 变量 $f\pm g$ 也收敛,且

$$\lim(f\pm g)=A\pm B=\lim f\pm\lim g;$$

(2) 变量 kf 也收敛(其中 k 为常数),且

$$\lim(kf)=kA=k\lim f;$$

(3) 变量 $f\cdot g$ 也收敛,且

$$\lim(f\cdot g)=A\cdot B=(\lim f)\cdot(\lim g);$$

(4) 当 $B\neq0$ 时,变量 f/g 也收敛,且

$$\lim\frac{f}{g}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f}{\lim g}.$$

6. 有理分式求极限

$$(1)\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\infty, & 当\ m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m<n;\end{cases}$$

$$(2)\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^sP_1(x)}{(x-a)^rQ_1(x)}=\begin{cases}0, & s>r,\\ \dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}, & s=r,\\ \infty, & s<r,\end{cases}$$

其中 $P_1(a)\neq0$, $Q_1(a)\neq0$.

7. 无理分式求极限

(1) 当 $x\to\infty$,若分式呈 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,则分子分母同除 x 的最高次幂再求极限.

(2) 当 $x\to x_0$ 时,若分式呈 $\frac{0}{0}$ 型,则将分子分母同乘一个因式,以便使分子、分母为零的公因子显露出来,消去零因子.

8. 极限存在的准则 · 两个重要的极限

准则 1 给定变量 f,g,h. 若 $f\leqslant h\leqslant g$,且 $\lim f=\lim g=A$,则 $\lim h=A$.

利用准则 1 我们可以证明一个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

准则 2 单调有界变量必有极限.

利用准则 2,我们可以证明另一个重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

可以证明,当 x 以任何方式趋向于∞时都有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

若令 $y=1/x$,那么当 $x\to\infty$时,$y\to 0$,则上式可改写成下面的形式:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=\mathrm{e}.$$

可见这两种写法只是形式上不同,实质是一样的.

利用这个重要极限,我们也可以求出另外一些函数的极限.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{x}$($a$ 为非零常数).

解 令 $t=ax$,则当 $x\to 0$ 时,$t\to 0$. 于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to 0}a\cdot\frac{\tan ax}{ax}=a\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=a.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

例 8 连续复利问题.

设有本金 P_0,计息期的利率为 r,计息期数为 t,如果每期结算一次,则 t 期后的本利和为

$$A_t=P_0(1+r)^t.$$

如果每期结算 m 次,那么每期的利率为$\dfrac{r}{m}$,原 t 期后的本利和为

$$A_m = P_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

如果 $m\to\infty$,则表示利息随时计入本金,意味着立即存入,立即结算.这样的复利称为连续复利.于是 t 期后的本利和为

$$\lim_{m\to\infty}P_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = P_0\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}.$$

令 $n=\frac{m}{r}$,当 $m\to\infty$时,$n\to\infty$.于是

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}P_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} &= P_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}\\ &= P_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}\\ &= P_0e^{rt}.\end{aligned}$$

9. 初等函数的连续性

根据初等函数的连续性,我们可以计算初等函数的极限.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$在 $x=0$ 处不连续.

令 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,当 $x\to 0$ 时 $u\to e$,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{u\to e}\ln u \quad (\text{初等函数的连续性})\\ &= \ln e = 1.\end{aligned}$$

二、习题

(一) 选择题

1. 如果集合 $A=\{x\,|\,x(x^2-1)=0\}$,下列集合中哪个集合与 A 相等(　　).

(A) $\{x\,|\,x(x+1)=0\}$;　　　　(B) $\{x\,|\,x^2(x^2-1)=0\}$;

(C) $\{x|(x-1)(x^2-1)=0\}$； (D) $\{x|e^x(x^2-1)=0\}$.

2. 设 $A=\{x|-5\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 8\}$，则有(　　).

(A) $A\subset B$； (B) $A\supset B$；

(C) $A\cap B\supset B$； (D) $A\cap B\subset B$.

3. 设 $M=\{x\mid x^2-x-6>0\}$，$R=\{x\mid x-1\leqslant 0\}$，则 $M\cap R=$(　　).

(A) $\{x|x>3\}$； (B) $\{x|x<-2\}$；

(C) $\{x|-2<x\leqslant 1\}$； (D) $\{x|x\leqslant 1\}$.

4. 下列集合中为空集的是(　　).

(A) $\{x|x<1$，且 $x\geqslant 0\}$； (B) $\{x|x+1=0\}$；

(C) $\{x|x^2+1=0$，x 为实数$\}$； (D) $\{x|x>0$，且 $x<1\}$.

5. 用区间表示满足不等式 $|x|>|x-2|$ 所有 x 的集合是(　　).

(A) $(-1,1)$； (B) $(1,+\infty)$；

(C) $(-\infty,1)$； (D) $(-\infty,+\infty)$.

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3,\\ x^2-9, & 3<|x|<4\end{cases}$ 的定义域是(　　).

(A) $[-3,4)$； (B) $(-3,4)$；

(C) $[-4,4)$； (D) $(-4,4)$.

7. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，则函数 $f(1-\ln x)$ 的定义域是(　　).

(A) $(0,1]$； (B) $[1-\ln 2,1]$；

(C) $[1/e,1]$； (D) $[1,e]$.

8. 函数 $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$ 的定义域为(　　).

(A) $(0,5)$； (B) $[1,4)$；

(C) $(1,4]$； (D) $[1,4]$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，下列函数中必为偶

函数的是(　　).

(A) $y=f^2(x)$;　　　　(B) $y=x^2f(x)$;

(C) $y=f(|x|)$;　　　　(D) $y=f[(x+1)^2]$.

10. 设函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,a\neq1)$,则该函数是(　　).

(A) 奇函数;　　　　(B) 偶函数;

(C) 非奇非偶函数;　　　　(D) 既奇又偶函数.

11. 在 **R** 上,下列函数中为周期函数的是(　　).

(A) $\sin x^3$;　(B) $\sin 2x$;　(C) $x\cos x$;　(D) $x\sin x$.

12. 下列函数中为周期函数的是(　　).

(A) $x\cos x$;　(B) $\sin x^2$;　(C) $\sin\frac{1}{x}$;　(D) $\sin^2 x$.

13. 函数 $f(x)=|x^2-1|$的单调、有界区间是(　　).

(A) $[-1,1]$;　　　　(B) $(1,+\infty)$;

(C) $[-2,0]$;　　　　(D) $[-2,-1]$.

14. 函数 $y=1+\lg(x+2)$的反函数是(　　).

(A) $y=10^{x-2}+1$;　　　　(B) $y=10^{x-2}-1$;

(C) $y=10^{x-1}+2$;　　　　(D) $y=10^{x-1}-2$.

15. 下列函数中为初等函数的是(　　).

(A) $y=\sqrt{\cos x-2}$;　　　　(B) $y=\sqrt{\sin x-1}$;

(C) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$　　　　(D) $y=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ x, & x\geqslant0.\end{cases}$

16. 设

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

则 $f[f(x)]=$(　　).

(A) $-f(x)$;　(B) $f(-x)$;　(C) 0;　(D) $f(x)$.

17. 分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}$$

是一个(　　).

(A) 奇函数；　　(B) 偶函数；

(C) 非奇非偶函数；　　(D) 既是奇函数又是偶函数.

18. 设函数 $g(x)=1+x$ 且当 $x\neq 0$ 时 $f[g(x)]=\frac{1-x}{x}$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$的值是(　　).

(A) 0；　(B) 1；　(C) 3；　(D) -3.

19. 数列 $x_n=\frac{1-n}{n}$的极限是(　　).

(A) 0；　(B) 1；　(C) -1；　(D) 不存在.

20. 数列 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$的极限是(　　).

(A) 4；　(B) 3；　(C) 2；　(D) 不存在.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-n+1}{5n^3+n^2+n}=$(　　).

(A) $\frac{4}{5}$；　(B) 0；　(C) $\frac{1}{2}$；　(D) ∞.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{4n^2+2n-3}=$(　　).

(A) 1；　(B) $-1/2$；　(C) $-1/3$；　(D) $1/4$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$(　　).

(A) 0；　(B) 1；　(C) $1/2$；　(D) ∞.

24. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}=\mathrm{e}^{-3}$,则 $k=$(　　).

(A) $\frac{3}{2}$；　(B) $\frac{2}{3}$；　(C) $-\frac{3}{2}$；　(D) $-\frac{2}{3}$.

25. 设

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 2, & x>0,\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$的值为(　　).

(A) -2;　(B) 2;　(C) 0;　(D) 不存在.

26. 设

$$f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$的值为(　　).

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 不存在.

27. 当 $x\to\infty$时,下列函数中有极限的是(　　).

(A) $\sin x$;　(B) $\dfrac{1}{e^x}$;　(C) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$;　(D) $\arctan x$.

28. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0,\\ x^2-2, & x>0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$(　　).

(A) 2;　(B) 0;　(C) -1;　(D) -2.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=$(　　).

(A) 0;　(B) ∞;　(C) -2;　(D) 2.

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=$(　　).

(A) 0;　(B) 4/3;　(C) 5/4;　(D) ∞.

31. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=$(　　).

(A) 0;　(B) 1/4;　(C) 1/2;　(D) ∞.

32. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}=$(　　).

(A) 0;　(B) 1;　(C) π;　(D) 不存在.

33. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}=$(　　).

(A) 0;　(B) 1/3;　(C) 1/2;　(D) 1.

34. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{2-\frac{1}{x}}=$(　　).

(A) 1;　(B) e;　(C) e^{-1};　(D) e^2.

35. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^2$,则 $a=$(　　).

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 4.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\tan 2x}=$(　　).

(A) 4;　(B) 2;　(C) 1;　(D) 0.

37. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\sin\frac{1}{1+x}}=$(　　).

(A) 0;　(B) 1;　(C) e;　(D) 不存在.

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$(　　).

(A) 1;　(B) 0;　(C) ∞;　(D) 不存在.

39. 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是(　　).

(A) $e^{-x}+1(x\to+\infty)$;　(B) $e^{\frac{1}{x}}-1(x\to-\infty)$;

(C) $e^{-x}-1(x\to+\infty)$;　(D) $e^{-\frac{1}{x}}+1(x\to-\infty)$.

40. 当 $x\to+\infty$时,下列变量中无穷大量是(　　).

(A) $\ln(1+x)$;　(B) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(C) $e^{-x}+1$;　(D) $x\cos x$.

41. 当 $x\to 0$ 时,与无穷小量 $x+1000x^3$ 等价的无穷小量是(　　).

(A) $\sqrt[3]{x}$;　(B) $\sqrt{x}$;　(C) x;　(D) x^3.

42. 当 $n\to\infty$时,$n\sin\dfrac{1}{n}$是一个(　　).

(A) 无穷小量;　(B) 无穷大量;

(C) 无界变量;　(D) 有界变量.

43. 函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$的间断点是(　　).

(A) $x=1$ 或 $x=2$;　(B) $x=3$;

(C) $x=1,x=2,x=3$;　(D) 无间断点.

44. 函数 $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x-3}$ 的间断点为(　　).

(A) $x=3$;　　　　(B) $x=-1$;

(C) $x=-1$ 和 $x=3$;　　　　(D) 不存在.

45. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是它在该点处连续的一个(　　)

(A) 必要条件;　　　　(B) 充分条件;

(C) 充要条件;　　　　(D) 无关条件.

(二) 解答题

1. 各举三个无限集、有限集及空集的例子.

2. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$ 的所有的子集.

3. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,6\}$, 求:

(1) $A\cup B$;　　　　(2) $A\cap B$;

(3) $A\cup B\cup C$;　　　　(4) $A\cap B\cap C$.

4. 求下列各题集合的并、交与差:

(1) $A=[0,1]$, $B=[1,3]$;

(2) $A=[-1,4]$, $B=[2,4]$.

5. 叙述函数的定义,并指出下列各题中的两个函数是否相同,为什么?

(1) $y=x^2/x$ 与 $y=x$;

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$;

(3) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{x^2-2x}$;　　　　(2) $y=\lg(x^2-4)$;

(3) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;　　　　(4) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$;

(5) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　　　(6) $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

7. 如果 $f(x)=x^2-3x+2$,求:$f(0)$,$f(1)$,$f(-2)$,$f(-x)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x+\Delta x)-f(x)$.

8. 设 $\varphi(t)=t^3+1$,求 $\varphi(t^2)$,$[\varphi(t)]^2$.

9. 若 $f(x)=2x^2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x}+5x$,证明

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right).$$

10. 设 a 是实数,证明当 $|a|\geqslant 4$ 时,有:

$$\left|\frac{a+4}{a-2}\right|\leqslant |a|.$$

11. 计算下列函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$:

(1) $f(x)=x$,$x=2$,$\Delta x=0.2$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$,$x=4$,$\Delta x=0.1$;

(3) $f(x)=\lg x$,$x=1$,$\Delta x=0.01$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-8}{x+3}, & x\geqslant 8,\\ \dfrac{8-x}{x+3}, & x<8, x\neq -3,\end{cases}$ 求 $f(c)$.

13. 指出下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些是非奇非偶函数.

(1) $y=e^{-x^2}$;　　(2) $y=x^2\sin x$;

(3) $y=x^2+\sin x$;　　(4) $y=\lg(x^2+1)$;

(5) $y=\sin(x^2+1)$;　　(6) $y=|x+1|$.

14. 指出下列函数在指定区间内的增减性.

(1) $y=\sin x\ \left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi\right)$;

(2) $y=x^3(-\infty<x<+\infty)$;

(3) $y=|x+1|\ (-5\leqslant x\leqslant -1)$;

(4) $y=\lg x\ (0<x<+\infty)$.

15. 指出下列函数中哪些是周期函数，哪些不是；若是周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin ax\ (a>0)$； (2) $y=4$；

(3) $y=\sin 2x+\sin \pi x$； (4) $y=\sin x+\cos x$.

16. 证明：$\sin\sqrt{x}$不是周期函数.

17. 证明单调函数必有反函数存在.

18. 求下列函数的反函数.

(1) $y=ax+b\ (a\neq 0)$； (2) $y=\sqrt[3]{x^2+4}\ (x>0)$；

(3) $y=2\sin 3x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{6}\right)$； (4) $y=\lg(x+4)$.

19. 求 $y=\dfrac{2x-3}{4x+2}$的反函数.

20. 已知 $f(x)=x+1$，求 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

21. 已知一个无盖的圆柱形容器的体积为 V，试将其高表为底半径的函数，并将其表面积表为底半径的函数.

22. 已知在 x 轴上 $x=0$ 和 $x=1$ 点处，分别放置质量为 q，$p(p+q=1)$ 的两质点. 设 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化，试将区间 $(-\infty,x]$ 的质量 M 表为 x 的函数.

23. 某人从美国到加拿大去度假，他把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加 12%，回美国后他发现，把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少 12%.

(1) 把这两个函数关系表示出来，并证明这两个函数不互为反函数；

(2) 同一时期，某人从美国到加拿大去旅游，他把 10 000 美元兑换成加拿大元，但因故未能去成，于是他又将加拿大元兑换成了美元，问他是否亏损？

24. 根据极限定义证明下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-2)=10$；　(4) $\lim C=C$ (C 为常数).

25. 指出下列积极有限是否存在？为什么？

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$；　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+(-1)^n\dfrac{1}{n}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sgn}^2 x$；　(4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sin(x-3)}$.

26. 指出下列各函数在 $x=0$ 点处的极限是否存在.

(1) $f(x)=\begin{cases}0 & (x=0),\\ 1 & (x\neq 0);\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x+1 & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ x & (0<x<1);\end{cases}$

(3) $f(x)=x^{-1}$；

(4) $f(x)=\begin{cases}1-x & (x>0);\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$

27. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的极限都不存在，能否断定 $\{x_n+y_n\}$，$\{x_ny_n\}$ 的极限不存在？

28. 设 $\{x_n\}$ 的极限不存在，$\{y_n\}$ 的极限存在，问 $\{x_n+y_n\}$ 的极限是否存在？为什么？

29. 试求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2}{3n^2+1}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+7}{x^2+1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4}{4x^2+x-2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{4x^2+x+6}$；　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n}{n+1}$；

(9) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$；　(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$；

(13) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$；

(14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+1}$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$；

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin 2x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$；

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n$；

(20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$；

(21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+m}$ $(m\in\mathbf{N})$；

(22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$；

(23) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^x$；

(24) $\lim\limits_{x\to +\infty}2^x$；

(25) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{2x}$；

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos x}$；

(28) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$；

(29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x}{3\arctan 2x}$；

(30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\tan 4x}$.

30. 证明下列数列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(4x-1)^5}=\dfrac{1}{1024}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)=-\dfrac{5}{3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]=0$.

31. 证明下列函数在$(-\infty,+\infty)$上是连续的：

(1) $f(x)=|x|$；　　(2) $f(x)=\cos x+e^x$；

(3) $f(x)=\begin{cases}1 & (1<x<+\infty),\\ x & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ 0 & (-\infty<x<0);\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (-1\leqslant x\leqslant 1),\\ 0 & (-\infty<x<-1 \text{ 或 } 1<x<+\infty).\end{cases}$

32. 指出下列函数的连续的区间，如有间断点指出它所属的类型：

(1) $y=\dfrac{x^3}{1+x}$； (2) $y=\sqrt{x-1}$；

(3) $y=\dfrac{1}{2^x}$； (4) $y=\lg(x^2-9)$；

(5) $y=\dfrac{|x|}{x}$； (6) $y=\begin{cases}2, & x=1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x\neq 1;\end{cases}$

(7) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$； (8) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

33. 利用函数连续性计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1-x}{1+x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x^4+\ln\left(1-\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{\sin x}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x}$.

34. 证明函数的连续性.

(1) 证明：$y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$是连续的；

(2) 证明：$f(x)=\begin{cases}x^3\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$在 $x=0$ 处是连续的；

(3) 证明：$f(x)=\begin{cases}6x^2+1, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin 6x}{x}, & x>0,\end{cases}$在 $x=0$ 时是不连续的；

(4) 证明：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 3,\\ x+6, & x>3,\end{cases}$在 $x_0=3$ 是连续的.

35. 运用连续的性质，证明下列各题.

(1) 证明：$x\cdot 5^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根；

(2) 如 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且无零点，则 $f(x)>0$，或 $f(x)$

<0；

(3) 设 $f(x)=e^x-2$，证明在 $(0,2)$ 内，$f(x)$ 至少存在一个不动点，即至少存在一点 x_0，使 $f(x_0)=x_0$.

三、分析及解答

(一) 选择题

1. 答案是：B.

分析 由 $x(x^2-1)=0$，有

$$x=0 \quad \text{或} \quad x=\pm 1.$$

易见 $\{x \mid x^2(x^2-1)=0\}$ 与集合 A 相等.

故选择 B.

2. 答案是：D.

分析 易见(A)，(B)均不成立. 考虑到

$$A\cap B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 5\},$$

于是有 $A\cap B\subset B$.

故选择 D.

3. 答案是：B.

分析 由 $x^2-x-6>0$，有 $(x-3)(x+2)>0$，即

$$\begin{cases} x>3, \\ x>-2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x<3, \\ x<-2, \end{cases}$$

亦即 $$x>3 \quad \text{或} \quad x<-2.$$

于是 $$\begin{aligned} M\cap R &=\{x \mid x<-2\}\cap\{x \mid x\leqslant 1\} \\ &=\{x \mid x<-2\}. \end{aligned}$$

故选择 B.

4. 答案是：C.

分析 易见 $x^2+1=0$ 无实数解.

故选择 C.

5. 答案是：B.

分析 由$|x|>|x-2|$有

$$x^2>(x-2)^2,$$

即 $$4x>4.$$

因此 $$x>1.$$

故选择 B.

注意 对于实数集合的运算，可以在数轴上标出有关集合，以迅速得到正确结果.

6. 答案是：D.

分析 分段函数的定义域是各个定义区间（或点集）的并，于是有

$$\{|x|\leqslant 3\}\cup\{3<|x|<4\}=(-4,4).$$

故选择 D.

7. 答案是：C.

分析 $f(1-\ln x)$的定义域应满足：$1\leqslant 1-\ln x\leqslant 2$，即

$$\begin{cases}\ln x\leqslant 0,\\ \ln x\geqslant -1,\end{cases}\quad 亦即\quad \begin{cases}0<x\leqslant 1,\\ x\geqslant 1/\mathrm{e},\end{cases}$$

因此 $$1/\mathrm{e}\leqslant x\leqslant 1.$$

故选择 C.

8. 答案是：D.

分析 要使函数有意义，必须满足以下两个条件：

$$\begin{cases}5x-x^2>0,\\ \lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x^2-5x<0,\\ 5x-x^2\geqslant 4,\end{cases}$$

因此 $$\begin{cases}0<x<5,\\ 1\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

故选择 D.

9. 答案是：C.

分析 $f^2(-x)$不一定等于$f^2(x)$；$(-x)^2f(-x)=x^2f(-x)$

不一定等于 $x^2f(x)$；而 $f(|-x|)=f(|x|)$，根据偶函数定义，它是偶函数.

故选择 C.

10. 答案是：A.

分析 由于函数

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$$
$$=\log_a\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x).$$

故选择 A.

11. 答案是：B.

分析 易见

$$\sin(2x+2\pi)=\sin2(x+\pi).$$

它是一个周期为 π 的周期函数.

故选择 B.

12. 答案是：D.

分析 由于 x 不是周期函数，$x\cos x$ 也不是周期函数，$\sin x^2$ 不是周期函数，如果 $y=\sin x^2$ 是周期函数，根据周期函数的定义，就必然存在一个常数 $T>0$，使得 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$，即

$$\sin(x^2+2xT+T^2)=\sin x^2.$$

但是，这一等式当且仅当 $T=0$ 时，对于一切 x 成立. 因此，$\sin x^2$ 不是周期函数. 因为 $\frac{1}{x}$ 不是周期函数，所以 $\sin\frac{1}{x}$ 也不是周期函数. 因为 $y=\sin^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)$，显然 $\cos2x$ 的周期为 π，所以

$$\sin^2(x+\pi)=\frac{1}{2}[1+\cos2(x+\pi)]$$
$$=\frac{1}{2}(1+\cos2x)=\sin^2x.$$

故选择 D.

13. 答案是：D.

分析 因为 $f(x)$在$[-1,1]$上满足$|f(x)|\leqslant 1$，且 $f(-1)=f(1)$，所以 $f(x)$在$[-1,1]$上有界，但不是单调的；$f(x)$在$(1,+\infty)$内虽单调，但无界；又因为 $f(x)$在$[-2,0]$上满足$f(0)=f(-\sqrt{2})$，所以 $f(x)$在$[-2,0]$上虽有界，但不是单调的；$f(x)$在$[-2,-1]$上单调、有界.

故选择 D.

14. 答案是：D.

分析 由 $y=1+\lg(x+2)$得到 $y-1=\lg(x+2)$，即

$$x+2=10^{y-1},\ 亦即\ x=10^{y-1}-2,$$

故函数 $y=1+\lg(x+2)$的反函数为 $y=10^{x-1}-2$.

故选择 D.

15. 答案是：B.

分析 函数 $y=\sqrt{\cos x-2}$没有定义域，因此，它不是函数，当然也就不是初等函数；函数 $y=\sqrt{\sin x-1}$，是由 $\sin x-1$ 与 $\sqrt{x}$ 复合而成的，因此它是初等函数；另外两个函数，它们都是分段函数，一般来说，分段函数不是初等函数.

故选择 B.

16. 答案是：D.

分析

$$f[f(x)]=\begin{cases}-1, & f(x)<0,\\ 0, & f(x)=0,\\ 1, & f(x)>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

$$=f(x).$$

故选择 D.

17. 答案是：B.

分析

$$f(-x)=\begin{cases}1+x, & -x\leqslant 0\\ 1-x, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}=f(x).$$

故选择 B.

18. 答案是：D.

分析 由于

$$f[g(x)]=\frac{1-x}{x}=\frac{2-(1+x)}{(1+x)-1}=\frac{2-g(x)}{g(x)-1},$$

即
$$f(x)=\frac{2-x}{x-1}.$$

因此
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=-3.$$

故选择 D.

19. 答案是：C.

分析 先来看一下，当 n 无限增大时，x_n 的变化趋势：

$$0,-\frac{1}{2},-\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\cdots.$$

可见随着 n 的增大，x_n 越来越趋向于 -1.

故选择 C.

20. 答案是：C.

分析 由等比数列和的公式，得到

$$S_n=2-\frac{1}{2^n}.$$

可见，当 n 无限增大时，S_n 趋向于 2.

故选择 C.

21. 答案是：A.

分析 将分子、分母同时除以 n^3，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n+1}{5n^3+n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{5}.$$

故选择 A.

22. 答案是：B.

分析 将原式分子、分母同时除以 n^2，得到

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-2}{4+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

故选择 B .

23. 答案是：A.

分析 将原式有理化，得到

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.\end{aligned}$$

故选择 A .

24. 答案是：C.

分析 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2k}=e^{-3},$$

所以 $2k=-3$，即 $k=-\frac{3}{2}$.

故选择 C.

25. 答案是：B.

分析 当 $x\in N_{\frac{1}{2}}(1)$时，有 $f(x)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}2=2$.

故选择 B.

26. 答案是：B.

分析 当 $x>0$ 时，$f(x)=x+1$，于是

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x+1)=1.$$

当 $x<0$ 时，$f(x)=-x+1$，于是

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x+1)=1,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

故选择 B.

27. 答案是：C.

分析 由于 $x\to\infty$时，$\sin x$ 在 1 与 -1 之间无限次摆动，所以没有极限；而函数 $y=\frac{1}{e^x}$，当 $x\to+\infty$时，极限为 0，但 $x\to-\infty$时，它的极限不存在，所以也没有极限；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$，而 $\arctan x$，当 $x\to+\infty$时 $\arctan x$ 趋向于$\frac{\pi}{2}$，而 $x\to-\infty$时，$\arctan x$ 趋向于$-\frac{\pi}{2}$. 因此，它也没有极限.

故选择 C.

28. 答案是：D.

分析 由于 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-2)=-2.$$

故选择 D.

29. 答案是：C.

分析 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，而 $e^{x^2}-1\sim x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2.$$

故选择 C.

30. 答案是：C.

分析 将原式分子、分母进行因式分解，约去不为零的公因子$(x-3)$，得到

$$原式=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{4}.$$

故选择 C .

31. 答案是：B.

分析 将原式通分后，约去不为零的公因子$(x-2)$，得到

$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

故选择 B .

32. 答案是：C.

分析 将原式化成重要极限的形式. 令$\frac{\pi}{x}=y$，得到

$$原式=\lim_{x\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\pi.$$

故选择 C.

33. 答案是：B.

分析 将原式分母进行因式分解，得

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

故选择 B.

34. 答案是：B.

分析 原式$=\lim_{x\to 0}(1-x)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=1\cdot e=e.$

故选择 B.

35. 答案是：B.

分析 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{a}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{a}$$

$$=\mathrm{e}^{2a}\cdot 1=\mathrm{e}^{2a}.$$

根据 $\mathrm{e}^{2a}=\mathrm{e}^{2}$，所以 $a=1$.

故选择 B .

36. 答案是：B.

分析 原式$=\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\arcsin 4x}{4x}\cdot\dfrac{2x}{\tan 2x}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{4x}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 2x}.$$

令 $\arcsin 4x=y$，则 $4x=\sin y$，并且当 $x\to 0$ 时，有 $y\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{4x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x=1\times 1=1,$$

所以原式$=2\times 1\times 1=2$.

故选择 B .

37. 答案是：B.

分析 原式$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x+1}}=\mathrm{e}^{\sin\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}}=\mathrm{e}^{\sin 0}=\mathrm{e}^{0}=1$. 故选择 B.

38. 答案是：B.

分析 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，即$\dfrac{1}{x}$当 $x\to\infty$ 时是一个无穷小量，而 $|\sin x|\leqslant 1$，即 $\sin x$ 是一个有界变量. 根据无穷小量与有界变量乘积仍是无穷小量，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$. 故选择 B.

39. 答案是：B.

分析 因为

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+1)=1,\quad \lim_{x\to-\infty}(e^{\frac{1}{x}}-1)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}-1)=-1,\quad \lim_{x\to-\infty}(e^{-\frac{1}{x}}+1)=2.$$

故选择 B .

40. 答案是：A.

解 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}+1=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cos x$ 不存在，也不是无穷大.

故选择 A .

41. 答案是：C.

分析 当 $x\to0$ 时，$\dfrac{x+1000x^3}{x}\to1$.

故选择 C.

42. 答案是：D.

分析 由于当 $n\to\infty$时，

$$n\sin\frac{1}{n}=\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to1,$$

可见，它不是无穷小量，而是一个有界变量.

故选择 D.

43. 答案是：A.

分析 由 $x^2-3x+2=0$ 得到 $x=1$ 或 $x=2$.

故选择 A.

44. 答案是：C.

分析 因为 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$，所以函数 $f(x)$在 $x=-1$ 和 $x=3$ 点没有定义. 因此 $x=-1$ 和 $x=3$ 为间断点.

故选择 C.

45. 答案是：A.

分析　由函数连续定义可知，函数在一点处有定义是它在该点处连续的一个必要条件.

故选择 A.

（二）解答题

1. **答**　$A_1=\{m\mid m=2n,n\in\mathbf{N}\}$，

$A_2=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，

$A_3=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$等为无限集；

$B_1=\{2,4,6,8,10\}$，

$B_2=\{0\}$，

$B_3=\{b\mid 3b+1\leqslant 20,b\in\mathbf{N}\}$等为有限集；

$C_1=\{c\mid 2c+5\leqslant 4,c\in\mathbf{N}\}$，

$C_2=\{x\mid x^2+4=0,x\in\mathbf{R}\}$，

$C_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2<0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$等为空集.

2. **答**　由于集合 A 中有三个元素，所以它的所有的子集一共有

$$\mathrm{C}_3^0+\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_3^3=2^3=8$$

个，它们是

$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$.

3. **解**　(1) $A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{1,3,5\}=\{1,2,3,5\}$；

(2) $A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$；

(3) $$\begin{aligned}A\cup B\cup C&=\{1,2,3\}\cup\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\}\\&=\{1,2,3,5\}\cup\{2,4,6\}\\&=\{1,2,3,4,5,6\};\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}A\cap B\cap C&=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}\\&=\{1,3\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing.\end{aligned}$$

4. **解**　(1) $A\cup B=[0,1]\cup[1,3]=[0,3]$，

$A\cap B=[0,1]\cap[1,3]=\{1\}$，

$$A \backslash B=[0,1] \backslash [1,3]=[0,1);$$

(2) $A \cup B=[-1,4] \cup [2,4]=[-1,4]$,

$$A \cap B=[-1,4] \cap [2,4]=[2,4],$$

$$A \backslash B=[-1,4] \backslash [2,4]=[-1,2).$$

5. **答** 设 X 是一个给定的实数集合，f 是一个确定的对应规律. 如果对于 X 中的每一个实数，通过 f 都有 $\mathbf{R}$ 内的惟一确定的一个实数与之对应，那么，这个对应规律 f 就称为由 X 到 $\mathbf{R}$ 的函数，记为

$$f: X \to \mathbf{R}.$$

(1) 不相同，因为它们的定义域不相同，其中 $y=x^2/x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$，$y=x$ 的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$；

(2) 不相同，因为它们的定义域不相同，其中 $y=\lg x^2$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$，$y=2\lg x$ 的定义域为 $\{x \mid x>0, x \in \mathbf{R}\}$；

(3) 相同，因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$，$|x| \equiv \sqrt{x^2}$.

6. **解** (1) 要使函数有意义，必须满足

$$x^2-2x=x(x-2) \neq 0,$$

即

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 2, \end{cases}$$

所以函数的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,2) \cup (2,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义，必须满足

$$x^4-4>0,$$

即

$$|x|>2,$$

所以函数的定义域为 $(-\infty,2) \cup (2,+\infty)$.

(3) 要使函数有意义，必须满足以下两个条件

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0, \\ 1-x \neq 0, \end{cases}$$

即

$$(\text{I})\begin{cases}1+x\geqslant 0,\\1-x\geqslant 0,\\1-x\neq 0,\end{cases}\quad\text{或}\quad(\text{II})\begin{cases}1+x\leqslant 0,\\1-x\leqslant 0,\\1-x\neq 0.\end{cases}$$

不等式组(Ⅰ)的解为$-1\leqslant x<1$,而不等式(Ⅱ)无解.

所以函数的定义域为$[-1,1)$.

(4) 要使函数有意义,必须满足

$$\left|\frac{x-3}{2}\right|\leqslant 1,$$

即

$$-2\leqslant x-3\leqslant 2,$$

所以函数的定义域为$[1,5]$.

(5) 要使函数有意义,必须满足以下两个条件

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\x+2\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\neq\pm 1,\\x\geqslant -2,\end{cases}$$

所以函数的定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(6) 要使函数有意义,必须满足

$$\sin x-\cos x\neq 0,$$

即

$$\tan x\neq 1,$$

亦即

$$x\neq n\pi+\frac{\pi}{4}\quad(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

所以函数的定义域为$\left(n\pi+\frac{\pi}{4},(n+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)$,其中$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

7. **解** $f(0)=0^2-3\times 0+2=2$;

$f(1)=1^2-3\times 1+2=0$;

$f(-2)=(-2)^2-3\times(-2)+2=4+6+2=12$;

$f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2$;

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\left(\frac{1}{x}\right)+2=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2;$$

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=[(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+2]\\&\quad-(x^2-3x+2)\\&=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-3x-3\Delta x+2\\&\quad-x^2+3x-2\\&=2x\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x.\end{aligned}$$

8. **解** $\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$,

$[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1.$

9. **证明**

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{x}\right)&=2\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{5}{\frac{1}{x}}+5\left(\frac{1}{x}\right)\\&=2\,\frac{1}{x^2}+2x^2+5x+\frac{5}{x}\\&=2x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}+5x=f(x).\end{aligned}$$

10. **证明** 由绝对值的性质,有

$$\left|\frac{a+4}{a-2}\right|=\frac{|a+4|}{|a-2|}\leqslant\frac{|a|+4}{|a|-2}.$$

再由 $|a|\geqslant 4\Rightarrow |a|-2\geqslant 2$,

故
$$\frac{|a+4|}{|a-2|}\leqslant\frac{|a|+|a|}{2}=|a|.$$

11. **解** (1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x=0.2$;

(2) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

$$=\frac{-0.1}{4(4+0.1)}=-\frac{1}{164};$$

(3) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\lg(x+\Delta x)-\lg x$

$$=\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\lg(1+0.01)=\lg 1.01.$$

12. **解** 讨论两种情况：

(1) $c\geqslant 8$，则 $f(c)=\dfrac{c-8}{c+3}$；

(2) $c<8, c\neq -3$，则 $f(c)=\dfrac{8-c}{c+3}$.

13. **答** (1) 因为 $y(-x)=\mathrm{e}^{-(-x)^2}=\mathrm{e}^{-x^2}=y(x)$，

所以 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 是偶函数.

(2) 因为 $y(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-y(x)$，

所以 $y=x^2\sin x$ 是奇函数.

(3) 因为 $y(-x)=(-x)^2+\sin(-x)=x^2-\sin x$，

所以 $y=x^2+\sin x$ 是非奇非偶函数.

(4) 因为 $y(-x)=\lg((-x)^2+1)=\lg(x^2+1)=y(x)$，

所以 $y=\lg(x^2+1)$ 是个偶函数.

(5) 因为 $y(-x)=\sin((-x^2)+1)=\sin(x^2+1)=y(x)$，

所以 $y=\sin(x^2+1)$ 是个偶函数.

(6) 因为 $y(-x)=|-x+1|=|1-x|$，

所以 $y=|x+1|$ 是个非奇非偶函数.

14. **解** (1) 设 x_1, x_2 是区间 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的任意两点，并且 $x_1<x_2$. 于是有

$$y(x_1)-y(x_2)=\sin x_1-\sin x_2$$
$$=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}.$$

因为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}\in\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$，$\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}<0$，$\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，

所以 $y(x_1)-y(x_2)>0$.

可见 $y=\sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上是递减的.

(2) 设 x_1, x_2 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任意两点，并且 $x_1<x_2$.

于是有

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$$
$$=(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]>0.$$

可见 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是递增的.

(3) 设 x_1,x_2 是区间$[-5,-1]$上的任意两点,并且 $x_1<x_2$. 于是有

$$y(x_1)-y(x_2)=|x_1+1|-|x_2+1|$$
$$=-x_1-1-(-x_2-1)$$
$$=x_2-x_1>0.$$

可见 $y=|x+1|$在$[-5,-1]$上是递减的.

(4) 设 x_1,x_2 是区间$(0,+\infty)$内任意两点,并且 $x_1<x_2$. 于是有

$$\frac{x_2}{x_1}>1,$$

$$y(x_2)-y(x_1)=\lg x_2-\lg x_1=\lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0.$$

可见 $y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$内是递增的.

15. **答** (1) 是周期函数,周期 $T=2\pi/a$.

因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$都有

$$\sin a(x+2\pi/a)=\sin(ax+2\pi)=\sin ax.$$

(2) 不是周期函数.

所以对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,虽然任意 $C>0$ 都有

$$y(x+C)=4=y(x),$$

但是由于最小正数是不存在的,所以 $y=4$ 不是周期函数.

(3) 不是周期函数.

因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,虽然 $\sin 2x$ 与 $\sin\pi x$ 分别是周期为 π 与 2 的周期函数,但由于 π 与 2 是不可公度的,故 $y=$

$\sin 2x+\sin\pi x$ 不是周期函数.

(4) 是周期函数,周期 $T=2\pi$.

因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有

$$\sin(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)=\sin x+\cos x.$$

16. **证明** 根据周期函数的性质,任何两个相邻的零点之间是等距离的,由于 $y=\sin\sqrt{x}$,它的零值点为 $x_n=(n\pi)^2,n=0,1,2,\cdots$. 可知

$$x_{n+1}-x_n=[(n+1)\pi]^2-(n\pi)^2=\pi^2(2n+1).$$

显然,$x_{n+1}-x_n$ 随 n 的增大而增大,因此,相邻的零值点之间不是等距离的,故 $\sin\sqrt{x}$ 不是周期函数.

17. **分析** 要证明 $y=f(x)(x\in X,y\in Y)$ 有反函数存在,即要证明对于 Y 中的任意一个 y_0,X 内都有一个 x_0,使得 $f(x_0)=y_0$,并且只有一个这样的 x_0 存在. 下面我们首先证明 x_0 是存在的,然后再证明 x_0 是惟一的.

证 令 $y=f(x)(x\in X,y\in Y)$ 在 X 上是单调的,不妨假设 $f(x)$ 在 X 上是递增函数,即对于任意的 $x_1,x_2\in X$,若 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$.

存在性. 对于任意的 $y_0\in Y$,由于 $y=f(x)$,所以至少存在一个 $x_0\in X$,使得 $f(x_0)=y_0$.

惟一性. 用反证法,设存在一个 $y_0\in Y$,使得 $x_1,x_2\in X$(不妨假设 $x_1<x_2$)满足 $f(x_1)=y_0$ 和 $f(x_2)=y_0$,于是有 $f(x_1)=y_0=f(x_2)$,即对于 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)=f(x_2)$. 这与函数 $y=f(x)$ 是递增函数相矛盾. 这说明不存在这样的 $y_0\in Y$,使得有两个或两个以上的 $x\in X$ 同时满足 $f(x)=y_0$.

综上所述,对于任意的 $y_0\in Y$,有一个而且只有一个 $x_0\in X$,使得 $f(x_0)=y_0$. 由反函数的定义可知,$x=f^{-1}(y)(y\in Y)$ 是存在的.

18. **解** (1) 因为 $ax=y-b, a\neq 0$,
所以 $x=\frac{y}{a}-\frac{b}{a}$.
把 x, y 互换,得到 $y=ax+b$ 的反函数

$$y=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}.$$

(2) 因为 $y^3=x^2+4, x>0$,
所以 $x=\sqrt{y^3-4}$.
把 x, y 互换,得到 $y=\sqrt[3]{x^2+4}$的反函数

$$y=\sqrt{x^3-4}$$

(3) 因为$\frac{y}{2}=\sin 3x, 0<x<\frac{\pi}{6}$,
根据反正弦函数的定义,有

$$3x=\arcsin\frac{y}{2},$$

所以 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$.
把 x, y 互换,得到 $y=2\sin 3x$ 的反函数

$$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}.$$

(4) 根据指数的定义,有

$$x+4=10^y,$$

所以 $x=10^y-4$.
把 x, y 互换,得到 $y=\lg(x+4)$的反函数

$$y=10^x-4.$$

19. **解** 由 $y=\frac{2x-3}{4x+2}$得到 $x=\frac{2y+3}{2-4y}$, x 和 y 互换,因此函数的反函数为

$$y=\frac{2x+3}{2-4x}.$$

20. **解** 由 $y=f(x)=x+1$ 得到 $x=y-1$,

因此 $f^{-1}(x)=x-1$，于是我们有

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-1.$$

21. **解** 设圆柱的底半径为 r，高为 h，表面积为 S. 根据圆柱体积公式，有

$$V=\pi r^2 h,$$

得到

$$h=\frac{V}{\pi r^2}\quad (r>0).$$

根据圆柱体的表面积公式(除上顶表面)，有

$$S=2\pi rh+\pi r^2,$$

将 $h=\frac{V}{\pi r^2}$代入后，得到

$$S=\frac{2}{r}V+\pi r^2\quad (r>0).$$

22. **解** 当 x 在定义域内连续变动时，可以把它分成下列各区间来讨论对应的 M 值. 显然有

当 $x<0$ 时，$M=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$M=q$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$M=p+q=1$.

由此：

$$M=\begin{cases}0, & x<0;\\ q, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

23. **解** (1) 设 $f_1(x)$表示将 x 美元兑换成加拿大元数，$f_2(x)$表示将加拿大元兑换成美元数，则

$$f_1(x)=x+x\cdot 12\%=1.12x,\quad x\geqslant 0,$$

$$f_2(x)=x-x\cdot 12\%=0.88x,\quad x\geqslant 0,$$

$$f_2(f_1(x))=0.88\times 1.12x=0.9856x<x,$$

故由反函数的性质：

$$f_2(f_1(x)) = x,$$

可知：f_1, f_2 不互为反函数.

(2) 由(1)得到：

$$f_2(f_1(x)) = 0.9856x,$$

现在 $x=10000$，则

$$f_2(f_1(x)) = 9856.$$

由题意：

$$10000 - 9856 = 144(\text{美元}).$$

故此人亏损，亏损值为 144 美元.

24. **证明** (1) 对于任意给定的正数 ε，要使

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

只要

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

$$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

因此，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. 那么当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

成立. 由数列极限定义，可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

(2) 对于任意给定的正数 ε，要使

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon,$$

只要

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon,$$

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

因此,取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$. 那么当 $|x|>X$ 时,就有

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon,$$

成立. 由函数极限定义,可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

(3) 对于任意给定的正数 ε,要使

$$|3x - 2 - 10| < \varepsilon,$$

只要

$$3|x - 4| < \varepsilon,$$

$$|x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. 那么当 $0<|x-4|<\delta$ 时,就有

$$|3x - 2 - 10| < \varepsilon$$

成立. 由函数极限定义,可知

$$\lim_{x\to 4}(3x - 2) = 10.$$

(4) 对于任意给定的正数 ε,由于不等式

$$|C - C| < \varepsilon$$

是一个绝对不等式. 因此,对于变量 $y=C$ 可以任取一个时刻,在那个时刻以后的所有 y,都有

$$|y - C| = |C - C| < \varepsilon$$

成立. 由变量极限定义,可知

$$\lim C = C.$$

25. **答** (1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$不存在. 因为当 $x>0$ 时

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1;$$

而当 $x<0$ 时

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1.$$

由此可见，函数$\frac{|x|}{x}$在 $x=0$ 点的左、右极限虽然都存在，但不相等，所以$\frac{|x|}{x}$在 $x=0$ 点极限不存在.

(2) 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)$存在，等于 1. 因为对于任意给定的正数 ε，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，就有

$$\left|1+(-1)^n\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立. 根据函数极限定义，可知

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)=1.$$

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{sgn}^2x$ 存在，等于 1. 因为函数 sgn^2x 在 $x=1$ 附近恒等于 1，对于任意给定的正数 ε，取 $\delta=\frac{1}{2}$，当 $|x-1|<\delta$ 时，恒有

$$|\mathrm{sgn}^2x-1|=|1-1|=0<\varepsilon$$

成立. 根据函数极限定义，可知

$$\lim_{x\to 1}\mathrm{sgn}^2x=1.$$

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sin(x-3)}$不存在. 因为 $\lim\limits_{x\to 3}\sin(x-3)=0$，所以函数$\frac{1}{\sin(x-3)}$在 $x=3$ 附近可以任意大. 因此不存在这样的常数作为它的极限值.

26. **答** (1) 存在. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

(2) 不存在. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$,而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$.

(3) 不存在. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, $\frac{1}{x}$在 $x=0$ 附近可以任意大.

(4) 不存在. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}0=0$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-x)=1.$$

27. **答** 不能. 例如, $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n+1}$它们的极限都不存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=-1$.

28. **答** 一定不存在. 因为若$\{x_n+y_n\}$的极限存在,则由$\{y_n\}$的极限存在,根据极限的四则运算可以推出$(x_n+y_n)-y_n$ 的极限存在,即$\{x_n\}$的极限存在. 这与题设是矛盾的.

29. **解** (1) 先用 n^2 除$\frac{4n^2+2}{3n^2+1}$的分子和分母,得

$$\frac{4+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}};$$

然后取极限,根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ 和极限四则运算,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{3}.$$

(2) 先对$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})/1$ 有理化分子,得

$$\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

然后取极限,根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, $0\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$和极限

存在的准则 1(两边夹定理)，得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+1)=5\neq0$，根据极限的四则运算，得

$$\lim_{x\to2}\frac{4x+7}{x^2+1}=\frac{15}{5}=3.$$

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to0}4x^2+x-2=-2\neq0$，根据极限的四则运算，得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3-4}{4x^2+x-2}=\frac{-4}{-2}=2.$$

(5) 因为$\dfrac{x^2-2}{4x^2+x+6}$的分子、分母的最高次项都是二次，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{4x^2+x+6}=\frac{1}{4}.$$

(6) 先对$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$有理化分子，得

$$\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\frac{2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})},$$

然后取极限，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=0.$$

(7) 先用 5^{n+1}除$\dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}$的分子和分母，得

$$\frac{\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^n+1\right]\frac{1}{5}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}+1},$$

然后取极限，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ 和极限的四则运算，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n+1\right]\dfrac{1}{5}}{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}+1}=\frac{1}{5}.$$

(8) 由于$\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$的分子、分母的最高次项分别为$\dfrac{1}{3}$和 1，所以当 $n\to\infty$时，$\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$是一个无穷小. 考虑到$|\sin n|\leqslant 1$，根据无穷小的性质 2：有界变量与无穷小的乘积仍是无穷小，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\sin n}{n+1}=0.$$

(9) 先对$\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$有理化分子，得

$$\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

然后取极限，考虑到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{x+\Delta x}=\sqrt{x}$，根据极限的四则运算，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(10) 因为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，可见$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$的分子、分母的最高次项都是二次，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)/2}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

(11) 因为

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}},$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3}},$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=0$ 和极限的四则运算，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\Big/\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)\Big/\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{4}{3}.$$

（12）因为 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)$，所以

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+\cdots+x+1)=n.$$

（13）因为 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$，所以

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$$

（14）由极限的四则运算，得

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x+1}=\frac{0}{3}=0.$$

（15）先对 $\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$ 有理化分子，得

$$\frac{(\sqrt{4+x^2}-2)(\sqrt{4+x^2}+2)}{x(\sqrt{4+x^2}+2)}$$

$$=\frac{x^2}{x(\sqrt{4+x^2}+2)}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}+2},$$

然后取极限,根据极限的四则运算,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}+2}=\frac{0}{4}=0.$$

(16) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$,根据极限四则运算,得

$$\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}4+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=4.$$

(17) 因为 $x\to 0$ 时,$\sin 2x\sim 2x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{2x}=\frac{1}{4}.$$

(18) 因为 $x\to 0+0$ 时,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$、$\sin x\sim x$,所以

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}x}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(19) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}=\lim\limits_{\frac{n}{4}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}=\mathrm{e}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4=\mathrm{e}^4.$$

(20) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{-x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-x)}\right)^{-x}=\mathrm{e}$,所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(-x)}\right)^{-x}\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-x)}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

(21) 因为对于任意 $m\in\mathbf{N}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}\right]=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+m}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

(22) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$,所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty.$$

(23) 因为 $x\to-\infty$时,$-x\to+\infty$,$2^{-x}\to+\infty$,所以

$$\lim_{x\to-\infty}2^{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2^{-x}}=0.$$

(24) 因为 $x>1$,$x\to+\infty$时,$2^{x}>x\to+\infty$,所以

$$\lim_{x\to+\infty}2^{x}=+\infty.$$

(25) 因为 $\sin x-\sin a=2\cos\frac{a+x}{2}\sin\frac{x-a}{2}$,且 $x\to a$ 时,$\sin\frac{x-a}{2}\sim\frac{x-a}{2}$,$\cos\frac{x+a}{2}\to\cos a$,所以

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=2\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$= 2\cos a \lim_{x \to a} \frac{\frac{x-a}{2}}{x-a} = \cos a.$$

(26) 因为 $x \to 0$ 时，$\sin x^2 \sim x^2$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0.$$

(27) 因为 $x \to 0$ 时，$e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sin x \sim x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

(28) 因为 $\sin x = \sin(\pi - x)$，且 $x \to \pi$ 时，$\sin(\pi - x) \sim (\pi - x)$，所以

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{\pi - x}{x - \pi} = -1.$$

(29) 因为 $x \to 0$ 时，$\sin 4x \sim 4x, \arctan 2x \sim 2x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin 4x}{3\arctan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \times 4x}{3 \times 2x} = \frac{4}{3}.$$

(30) 因为 $x \to 0$ 时，$\ln(1 + 2x) \sim 2x, \tan 4x \sim 4x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\tan 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

30. **证明** (1) 对于 $n \geqslant 2$，我们有

$$\begin{aligned} 2^n &= (1 + 1)^n \\ &= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + 1 \\ &= 1 + n + \frac{n^2}{2} + \cdots + 1 \geqslant \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

故
$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$，根据两边夹原理，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^5}=\dfrac{1}{4^5}=\dfrac{1}{1024}$.

分析 此题用观察法，由于分母和分子的 x 的最高次数都是 5，因此在 $x\to\infty$ 时，它的极限为分子和分母 x 的最高次项的系数的比.

(3)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)[(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1})^2+x\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}+x^2]}{(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1})^2+x\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}+x^2}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+1}{(x^3-5x^2+1)^{2/3}+x(x^3-5x^2+1)^{1/3}+x^2}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\dfrac{1}{x^2}}{\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^{2/3}+\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^{1/3}+1}\\
&=-\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

分析 此题主要是对分子、分母同时乘以一项，从而利用立方差的公式，使分子有理化.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\\
&=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{2}\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}=0.
\end{aligned}$$

分析 此题应用三角函数的和差化积公式，然后再利用无穷小量乘上有界变量仍是无穷小量这个极限的性质.

31. **证明** (1) 由

$$f(x)=\begin{cases}x & (0<x<+\infty),\\ 0 & (x=0),\\ -x & (-\infty<x<0),\end{cases}$$

可见，当 $0<x<+\infty$ 时 $f(x)=x$. 由于 $y=x$ 是一个基本初等函数，根据基本初等函数在其定义域内是连续的，因此函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时是连续的. 当 $-\infty<x<0$ 时 $f(x)=-x$，同理可知 $f(x)$ 在 $x<0$ 时也是连续的. 又由于

$$\lim_{x\to 0}f(x), = \lim_{x\to 0}|x| = 0 = f(0),$$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 时连续.

由上面的讨论可知函数 $f(x)=|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的.

(2) 由于 $y=\cos x$ 和 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都是连续的，根据连续函数的性质，它们的和 $\cos x+e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也是连续的，即 $f(x)=\cos x+e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的.

(3) 由函数 $f(x)$ 的定义可知，在区间 $(1,+\infty)$、$(0,1)$ 以及 $(-\infty,0)$ 内它们对应的函数 $y=1$，$y=x$ 以及 $y=0$ 都是基本初等函数，因而它们都是连续的；而在 $x=0$ 点，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0)\\ &= \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} f(x),\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 点也是连续的；在 $x=1$ 点

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 = f(1)\\ &= \lim_{x\to 1^-} x = \lim_{x\to 1^-} f(x),\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 点是连续的.

由上面的讨论可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的.

(4) 由

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ 1+x & (-1\leqslant x<0),\\ 0 & (-\infty<x<1 \text{ 或 } 1<x<+\infty),\end{cases}$$

可见，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)=1-x$ 是一个初等函数，根据初等函数

在其定义区间上是连续的，因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的；当 $-1 \leqslant x < 0$ 时 $f(x)=1+x$，同理可知 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上也是连续的. 而在 $x=0$ 点

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(1+x)=1=f(0)\\ &= \lim_{x\to 0^+}(1-x)=\lim_{x\to 0^+} f(x),\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 点也是连续的；在 $x=1$ 点

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(1-x)=0=f(1)\\ &= \lim_{x\to 1^+} 0=\lim_{x\to 1^+} f(x);\end{aligned}$$

在 $x=-1$ 点

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} 0=0=f(-1)\\ &= \lim_{x\to -1^+}(1+x)=\lim_{x\to -1^+} f(x),\end{aligned}$$

可见 $f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 点是连续的.

由上面的讨论可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的.

32. **答** (1) 由于函数 $\dfrac{x^3}{1+x}$ 在 $x=-1$ 点没有定义，并且 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{1+x}=\infty$，即不存在，所以其连续区间为 $(-\infty,-1)$ 或 $(-1,+\infty)$；间断点为 $x=-1$，它是一个第Ⅱ类间断点.

(2) 由于函数 $\sqrt{x-1}$ 是一个初等函数，其定义区间为 $[1,+\infty)$，根据初等函数在其定义区间上是连续的，所以函数 $\sqrt{x-1}$ 的连续区间为 $[1,+\infty)$；没有间断点.

(3) 由于函数 $\dfrac{1}{2^x}$ 是一个初等函数，其定义区间为 $(-\infty,+\infty)$，根据初等函数在其定义区间上是连续的，所以函数 $\dfrac{1}{2^x}$ 的连续区间为 $(-\infty,+\infty)$；没有间断点.

(4) 由于函数 $\lg(x^2-9)$ 是一个初等函数，其定义区间为

$(-\infty,-3)$或$(3,+\infty)$，根据初等函数在其定义区间上是连续的，所以函数 $\lg(x^2-9)$ 的连续区间为$(-\infty,-3)$或$(3,+\infty)$；没有间断点.

(5) 由于函数$\frac{|x|}{x}$在 $x=0$ 点没有定义，并且

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

所以其连续区间为$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$；间断点为 $x=0$，它是一个第Ⅰ类间断点.

(6) 由于函数

$$y=\begin{cases}2, & x=1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x\neq1\end{cases}$$

在 $x=1$ 点的极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x}=\infty$，即不存在，所以其连续区间为$(-\infty,1)$或$(1,+\infty)$；间断点为 $x=1$，它是一个第Ⅱ类间断点.

(7) 由于函数 $x\sin\frac{1}{x}$在 $x=0$ 点没有定义，并且 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$，所以其连续区间为$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$；间断点为 $x=0$，它是一个第Ⅰ类间断点. 如果我们补充定义：当 $x=0$ 时，$y=0$，这时函数

$$y=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上连续. 可见 $x=0$ 点为函数 $x\sin\frac{1}{x}$的一个可去间断点.

(8) 由于函数

$$y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$$

在 $x=1,x=2$ 两个点没有定义，并且

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\infty,$$

所以其连续区间为$(-\infty,1)$或$(1,2)$或$(2,+\infty)$；间断点 $x=1$ 是一个第Ⅰ类间断点，$x=2$ 是一个第Ⅱ类间断点. 如果我们补充定义：当 $x=1$ 时，$y=-2$，这时函数

$$y=\begin{cases}-2, & x=1,\\ \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq 1\end{cases}$$

在 $x=1$ 点也连续. 可见 $x=1$ 点为函数$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$的一个可去间断点.

34. **解** (1) 由初等函数的连续性，有

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1-x}{1+x}=\cos\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x}\right)=\cos\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}+1}\right)$$

$$=\cos(-1)=\cos 1.$$

(2) 先将函数化成指数形式

$$\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)},$$

然后由初等函数的连续性，有

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\ln\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x}{2+x}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{x+3-9}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\frac{1}{6}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\frac{1}{2}\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x^4+\ln\left(1-\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{\sin x}=\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^4+\ln 1}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$

$$=\frac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^4}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\frac{\pi^4}{4^4\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}}=\frac{\pi^4\sqrt{2}}{256}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-1}{2x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=0.$$

35. **证** (1) 设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2,$$

故 $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=0.$$

因此 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$连续.

分析 此题主要运用连续函数的定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,由连续函数的定义可知,$f(x)$在 $x=0$ 连续.

注意 在一般情况下,

$$f(x)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

只要 $k>0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}x^k=0$,而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$是有界变量,故 y 在 $x=0$ 连续.

(3) 由于左极限 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(6x^2+1)=1$,右极限 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 6x}{x}=6$. 故 $f(0^-)\neq f(0^+)$. 因此,$f(x)$在 $x=0$ 时不连续.

分析 在一般情况下,即

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+1, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0,\end{cases}$$

由于 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+1)=1$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$,$f(0)=(ax^2+1)|_{x=0}=1$.

只要在 $a=1$ 时,就有

$$f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1.$$

因此在 $a=1$ 时,在一般情况下 $f(x)$在 $x=0$ 时连续,也就是说

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\end{cases}$$

在 $x\in(-\infty,+\infty)$时是连续的.

(4) **方法一** 由

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(\Delta x+x_0)-f(x_0)=f(3+\Delta x)-3^2\\&=(3+\Delta x)^2-9=6\Delta x+(\Delta x)^2,\end{aligned}$$

因此 $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

故 $f(x)$在 $x_0=3$ 时,是连续的.

方法二 由于

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x+6) = 9, \quad f(3) = 3^2 = 9,$$

因此
$$f(3^+) = f(3^-) = f(3) = 9.$$

故 $f(x)$在 $x_0=3$ 时是连续的.

36. **证** (1) 令 $f(x)=x\cdot 5^x-1$,则 $f(x)$在$[0,1]$上连续,由于

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 4 > 0,$$

由中值定理的推广可知,在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$,故方程 $x\cdot 5^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

(2) 运用反证法,不妨设 $x\in[a,b]$, $f(x)$不恒为正(或负),即:存在 $x_1,x_2\in[a,b]$,使 $f(x_1)<0,f(x_2)>0$,由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续,故由连续函数的性质,必存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$,这样就和 $f(x)$无零点矛盾.

(3) 要使 $e^{x_0}-2=x_0$,即 $e^{x_0}-2-x_0=0$,我们不妨设:

$$F(x) = e^x - x - 2,$$

由于 $F(x)$在 $x\in[0,2]$连续,且

$$F(0) = -1 < 0, \quad F(2) = e^2 - 4 > 0,$$

故由零点定理,存在 $x_0\in(0,2)$使 $e^{x_0}-2=x_0$,此式就说明 $f(x_0)=x_0$,即 x_0 是 $f(x)$的不动点.

第二章　导数与微分

一、内容提要

（一）重要概念及性质

1. 导数

定义 2.1　设函数 $y=f(x)$ 在 $N(x_0)$ 内有定义．给 x_0 一个改变量 Δx，使得 $x_0+\Delta x\in N(x_0)$，函数 $y=f(x)$ 相应地有改变量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，那么就称此极限为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**导数**（或**微商**），记作

$$f'(x_0) \quad 或 \quad y'\big|_{x=x_0} \quad 或 \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

并称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是**可导的**．

类似左、右极限的定义，在这里我们定义

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$；定义

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记为 $f'_+(x_0)$．

左导数与右导数统称为**单侧导数**．如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点处都可导，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**可导**．

对于区间$[a,b]$的左端点 a 来说，函数 $f(x)$只能有右导数，而对右端点 b 来说，它只能有左导数. 但对于区间内某一点 c 来说，只有当它的左导数存在，右导数也存在，并且两者相等的情况下，我们才称函数在 c 点可导.

如果 $f(x)$在(a,b)内可导，那么对于(a,b)内任意一点 x 都有一个导数 $f'(x)$与它对应. 也就是说 $f'(x)$仍为 x 的函数，我们称之为 $f(x)$的**导函数**. 为了方便起见也称导函数为**导数**，记作$f'(x)$或 y'.

2. 高阶导数

定义 2.2 设函数 $y=f(x)$在 $N(x)$内是可导的，如果其导函数 $f'(x)$在点 x 处又有导数

$$[f'(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x},$$

则称它为函数 $f(x)$在点 x 处的**二阶导数**，记作

$$f^{(2)}(x), y'', \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},$$

并称函数在点 x 处是**二阶可导的**.

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的每一点处都是二阶可导，那么称 $f(x)$在(a,b)内**二阶可导**.

类似二阶导数，我们可以定义 n 阶导数：

定义 2.3 设函数 $y=f(x)$在 $N(x)$内有直到 $n-1$ 阶的导数，如果它的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$在点 x 处可导，那么就称 $f^{(n-1)}(x)$在点 x 的导数为函数 $f(x)$在点 x 处的 **n 阶导数**，记作

$$f^{(n)}(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \quad (n=1,2,\cdots).$$

为了方便起见，我们把函数本身称为零阶导数，记作

$$f(x)=f^{(0)}(x).$$

同样地，如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的每一点处都是 n

阶可导的，那么就称 $f(x)$在(a,b)内 n **阶可导**.

3. 微分

定义 2.4 设函数 $y=f(x)$在 $N(x_0)$内有定义，给 x_0 一个改变量 Δx，使得 $x_0+\Delta x\in N(x_0)$，函数 $y=f(x)$相应地有改变量 Δy. 如果存在着这样的一个常数 A，使得

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x\to 0),$$

那么就称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $f(x)$在点 x_0 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}f(x_0) \quad 或 \quad \mathrm{d}y|_{x=x_0},$$

并称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处是**可微的**.

如果 $y=f(x)$在区间(a,b)内的每一点处都可微，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内**可微**，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$.

由上述定义可以看出，在 $\Delta x\neq 0$ 且 $\Delta x\to 0$ 的过程中，$\Delta y,\Delta x,\mathrm{d}y$ 都是无穷小量，我们又称 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的线性主要部分，简称为**线性主部**. 它们之间的关系是：

$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x) \quad (\Delta x\neq 0,\Delta x\to 0).$$

定义 2.5 设函数 $y=f(x)$在 x_0 可导，Δx 为自变量 x 的改变量，则称

$$f'(x_0)\cdot\Delta x$$

为函数 $y=f(x)$在 x_0 点的**微分**，记作

$$\mathrm{d}f(x_0) \text{ 或者 } \quad \mathrm{d}y|_{x=x_0},$$

并称 $f(x)$在 x_0 点可微.

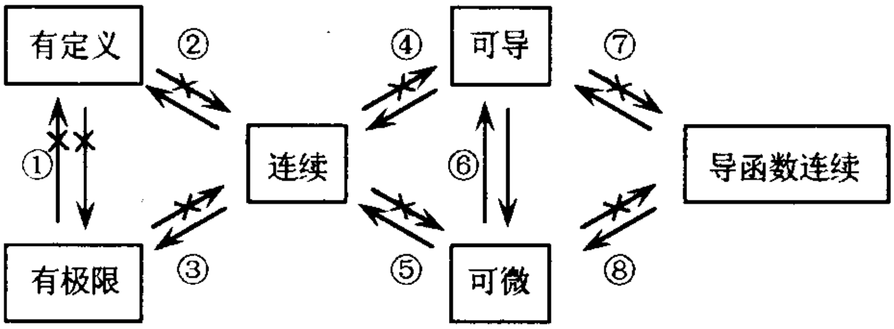
为了运算方便，我们规定自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 就是 Δx，这一规定与计算函数 $y=x$ 的微分所得到的结果是一致的，即

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = x'\Delta x = \Delta x.$$

于是微分的定义式也可以写成 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

一元函数微分学中各个概念之间的关系

一元函数 $y=f(x)$在点 x 处各概念之间的关系可图示如下：



其中“$A\rightarrow B$”表示由 A 推出 B；“$C\not\rightarrow D$”表示由 C 不能推出 D.

如果我们能够在各个概念之间加上一两个例子进行说明，这样就会加深对概念的理解，有助于进一步理解其他知识. 例如，在图中④处（即“可导必连续，反之不真”）为了说明“连续不一定可导”，可以选择函数 $y=|x|$，显然它在 $x=0$ 处是连续的，但是，它的左导数（等于-1）和右导数（等于$+1$）不等，因而是不可导的. 又如，在①处（即“有定义”与“有极限”是无关的）可以选择函数 $y=1$ $(x\neq 0)$，可见它在点 $x=0$ 处是没有定义的，但是它在点 $x=0$ 处的左极限（等于 1）和右极限（等于 1）是相等的，因而在点 $x=0$ 处是有极限的，说明一个函数在一点有极限而可以没有定义，即极限是函数在一点附近的变化趋势而与该点是否有定义是无关的.

（二）重要定理及公式

1. 导数与连续之间的关系

定理 2.1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可导的，那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的，反之不真.

该定理说明函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件.

2. 基本初等函数的求导公式

1. $(C)'=0$；　　2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$；

3. $(a^x)'=a^x\ln a$，$(e^x)'=e^x$；　　4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

5. $(\sin x)'=\cos x$；　　6. $(\cos x)'=-\sin x$；

7. $(\tan x)'=\sec^2 x$；　　8. $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

11. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　12. $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. 导数的四则运算法则

定理 2.2 当函数 $u(x)$,$v(x)$在点 x 处可导,则函数 $u(x)\pm v(x)$,$u(x)\cdot v(x)$,$\dfrac{u(x)}{v(x)}(v(x)\neq 0)$分别在该点处也可导,并且有

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $[Cu(x)]'=Cu'(x)$;

(4) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

注意 由(1),(2)两式可知,求有限多个函数的线性组合的导数,可以先求每个函数的导数,然后再线性组合,即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x)\right)'=\sum_{i=1}^{n}a_if_i'(x).$$

4. 复合函数的导数

定理 2.3 设函数 $u=\varphi(x)$在一点 x 处有导数 $u_x'=\varphi'(x)$,又函数 $y=f(u)$在对应点 u 处有导数 $y_u'=f_u'$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 处也有导数,并且

$$y_x'=y_u'\cdot u_x' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

利用复合函数的求导公式计算导数的关键是,适当地选取中间变量,将所给的函数拆成两个或几个基本初等函数的复合,然后用一次或几次复合函数求导公式,求出所给函数的导数.需要指出的是,以后在利用复合函数求导公式解题时,不要求写出中间变量 u,只要在心中默记就可以了.

5. 反函数的求导法则

定理 2.4 如果直接函数 $x=\varphi(y)$是可导的,且 $\varphi'(y)\neq 0$,那

么其反函数 $y=f(x)$ 也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

这就是说，反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

6. 隐函数的求导法则

给出一个隐函数，如何求它的导数呢?是不是需要把它化成显函数以后再求导数呢?这是不必要的，更何况有些隐函数根本不能化成显函数. 我们注意到将方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 代入方程后，则方程一定成为恒等式，即 $F(x,f(x))\equiv 0$. 因此，我们把 $F(x,y)=0$ 中的 y 看成是由方程所确定的隐函数时，方程 $F(x,y)=0$ 就成为一个恒等式，这时我们利用复合函数的求导法则对方程直接求导，即可解出 y'_x.

7. 幂指函数求导法则

对形如 $[f(x)]^{g(x)}$ 的幂指函数可以采取两种方法求导数. 一种方法是设 $y=[f(x)]^{g(x)}$，在等式的两边取对数后再求导；另一种方法是化成指数 $y=e^{g(x)\ln f(x)}$ 的形式后再求导数.

对于一般的幂指函数有下面的求导公式

$$\begin{aligned}([f(x)]^{g(x)})' = {} & g(x)[f(x)]^{g(x)-1}\cdot f'(x) \\ & + [f(x)]^{g(x)}\ln f(x)\cdot g'(x).\end{aligned}$$

8. 可微与可导之间的关系

定理 2.5 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是：函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导.

这个定理告诉我们，对于一元函数来说，可导与可微是两个等价的概念.

9. 微分的基本公式和运算法则

(1) 基本初等函数的微分公式

$dC=0$； $dx^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}dx$；

$da^{x}=a^{x}\ln a dx$； $de^{x}=e^{x}dx$；

些.

$\mathrm{d}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$； $\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

$\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$； $\mathrm{d}\cos x=-\sin x\mathrm{d}x$；

$\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\mathrm{d}x$； $\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\mathrm{d}x$；

$\mathrm{d}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； $\mathrm{d}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

$\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$； $\mathrm{d}\operatorname{arccot} x=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

（2）微分四则运算法则

设函数 $u(x)$，$v(x)$可微，则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u;$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v(x)\neq 0).$$

（3）一阶微分形式不变性

设由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数是 $y=f[\varphi(x)]$，根据微分定义及复合函数求导法则，我们可以给出复合函数的微分法则，即：

$$\mathrm{d}y=f'(u)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

考虑到 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 上式又可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

因此，不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$的微分都具有同样的形式：

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

这个性质称为**一阶微分形式的不变性**. 利用它进行微分运算时，可以不必分辨 u 是自变量还是因变量，这比求导数的运算来得方便些.

（三）重要方法

1. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在一点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点的切线的斜率. 从而可知当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0);$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

2. 微分的应用

(1) 近似计算

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微商 $f'(x_0)\neq 0$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

略去高阶无穷小 $o(\Delta x)$ 便得到

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x. \tag{1}$$

因此当 $|\Delta x|$ 很小时，可以用(1)式来计算函数增量 Δy 的近似值.

在(1)式中，令 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，于是(1)式可以改写成

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2}$$

可见，当 $|\Delta x|$ 很小时，可以用(2)式来计算点 x 处的函数值 $f(x)$.

(2) 误差估计

当我们根据直接测量值 x 按公式 $y=f(x)$ 计算 y 的值时，如果已知 x 的绝对误差为 δ_x，即

$$|\Delta x|\leqslant\delta_x,$$

那么，当 $y'\neq 0$ 时，y 的误差

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|y'|\cdot|\Delta x|\leqslant|y'|\cdot\delta_x,$$

即 y 的绝对误差约为

$$\delta_y = |y'| \cdot \delta_x$$

而 y 的相对误差约为

$$\frac{\delta_y}{|y|} = \left|\frac{y'}{y}\right| \cdot \delta_x.$$

二、习题

(一) 选择题

1. 函数 $f(x)=|x-2|$ 在点 $x=2$ 时的导数为(　　).

(A) 1;　　(B) 0;　　(C) -1;　　(D) 不存在.

2. 设 $f(x)=\ln(1-2x)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=$(　　).

(A) $\dfrac{2x_0}{2x_0-1}$;　(B) $\dfrac{-2x_0}{2x_0-1}$;　(C) $\dfrac{2}{2x_0-1}$;　(D) $\dfrac{-2}{2x_0-1}$.

3. 设函数 $f(x)=x^2$,则 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=$(　　).

(A) $2x$;　　(B) 2;　　(C) 4;　　(D) 不存在.

4. 若两个函数 $f(x)$,$g(x)$在区间(a,b)内各点的导数相等，则该二函数在区间(a,b)内(　　).

(A) 不相等;　　(B) 相等;

(C) 仅相差一个常数;　　(D) 均为常数.

5. 根据函数在一点处连续和可导的关系,可知函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leqslant 0; \\ 2x, & 0<x<1; \\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

的不可导点是(　　).

(A) $x=-1$;　(B) $x=0$;　(C) $x=1$;　(D) $x=2$.

6. 函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $f'(0)$的值为(　　).

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 不存在.

7. 函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处是(　　).

(A) 没有极限;　　(B) 有极限但不连续;

(C) 连续但不可导;　　(D) 可导.

8. 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{2-\ln x}$,则 $f'(1)=$(　　).

(A) 0;　　(B) $-\dfrac{1}{2}$;　　(C) $\dfrac{1}{2}$;　　(D) 1.

9. 设 $f(x)=\operatorname{arccot}x^2$,则 $f'(x_0)=$(　　).

(A) $\dfrac{2x_0}{1+x_0^2}$;　(B) $\dfrac{-2x_0}{1+x_0^2}$;　(C) $\dfrac{2x_0}{1+x_0^4}$;　(D) $\dfrac{-2x_0}{1+x_0^4}$.

10. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$,则 $f'(x)=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{x}$;　(B) $-\dfrac{1}{x}$;　(C) $\dfrac{1}{x^2}$;　(D) $-\dfrac{1}{x^2}$.

11. 设 $y=f(-x)$,则 $y'=$(　　).

(A) $f'(x)$;　(B) $-f'(x)$;　(C) $f'(-x)$;　(D) $-f'(-x)$.

12. 设 $y=x\ln x$,则 $y^{(3)}=$(　　).

(A) $\ln x$;　(B) x;　(C) $\dfrac{1}{x^2}$;　(D) $-\dfrac{1}{x^2}$.

13. 设 $y=xe^x$,则 $y^{(n)}=$(　　).

(A) nxe^x;　　(B) $(n-x)e^x$;

(C) $(n+x)e^x$;　　(D) $(1+x)^ne^x$.

14. 设 $f(x)=x^n$(n 为自然数),则 $f^{(n+1)}(x)=$(　　).

(A) $(n+1)!$;　(B) 0;　(C) $n!$;　(D) ∞.

15. $d(\sin 2x)=($　　$)$.

(A) $\cos 2x dx$;　(B) $-\cos 2x dx$;

(C) $2\cos 2x dx$;　(D) $-2\cos 2x dx$.

16. 设 $y=-\ln 3$,则 $dy=($　　$)$.

(A) $3dx$;　(B) $-\frac{1}{3}dx$;　(C) $\frac{1}{3}dx$;　(D) 0.

17. 设 $y=\cos(x^2)$,则 $dy=($　　$)$.

(A) $-2x\cos(x^2)dx$;　(B) $2x\cos(x^2)dx$;

(C) $-2x\sin(x^2)dx$;　(D) $2x\sin(x^2)dx$.

18. 过点(1,3)且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程 $y=y(x)$ 应满足的关系是(　　).

(A) $y'=2x$;　(B) $y''=2x$;

(C) $y'=2x, y(1)=3$;　(D) $y''=2x, y(1)=3$.

(二) 解答题

1. 根据导数的定义,求下列函数的导数:

(1) $y=x^2+1$;　(2) $y=\cos(x+2)$.

2. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处可导,求

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

3. 若下面的极限都存在,判别下式是否正确.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$.

4. 试讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x^k\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

当 k 分别为 0,1,2 时,在点 $x=0$ 处的可导性.

5. 函数 $y=|\sin x|$ 在点 $x=0$ 处导数是否存在？为什么？

6. 若函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\leqslant x_0),\\ ax+b & (x>x_0),\end{cases}$$

试选择 a,b 使 $f(x)$ 处处可导，并作出草图来.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$；　　(2) $y=(5x+1)(2x^2-3)$；

(3) $y=xe^x$；　　(4) $y=\sec x$；

(5) $y=\dfrac{2}{x^2-1}$；　　(6) $y=(x^2-2x+1)^{10}$；

(7) $y=3\sin x+\cos^2 x$；　　(8) $y=\dfrac{\tan x}{x^2+1}$；

(9) $y=\sin 4x$；　　(10) $y=10^{6x}$；

(11) $y=e^{\frac{x}{2}}(x^2+1)$；　　(12) $y=\arcsin(2x+3)$；

(13) $y=\ln(\sin x)$；　　(14) $y=(\ln x)^3$；

(15) $y=\arctan\sqrt{x^2+1}$；　　(16) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；

(17) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$；　　(18) $y=x^{\frac{1}{x}}$；

(19) $y=(\sin x)^{\cos x}$；　　(20) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x(x+3)}}$.

8. 设

$$y=\begin{cases}2x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0,\end{cases}$$

求 $y'(0)$.

9. 设

$$f(x)=\begin{cases}1-e^{2x}, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 f'_x.

10. 判断函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1,\\ 2x+3, & x>1,\end{cases}$$

在 $x=1$ 是否可导.

11. 若 $f'(x_0)=-1$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}$.

12. 若

$$g(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$f(x)$在点 $x=0$ 处可导,$F(x)=f[g(x)]$,求 $F'(0)$.

13. 求下列方程所确定的隐函数的导数:

(1) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$; (2) $\cos(xy)=x$;

(3) $y=1+xe^y$; (4) $x^y=y^x$.

14. 求曲线 $x^2+3xy+y^2+1=0$ 在点 $M(2,-1)$处的切线方程与法线方程.

15. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$; (2) $y=xe^{x^2}$;

(3) $y=e^x\cos x$; (4) $y=\ln\sin x$.

16. 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,求 $y''|_{x=0}$.

17. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,求 $y'''|_{x=\sqrt{3}}$.

18. 若 $x+2y-\cos y=0$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

19. 设 $y=e^x\sin x$,证明

$$y''-2y'+2y=0.$$

20. 验证函数 $y=e^{-\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}$满足关系式

$$xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0.$$

21. 由恒等式$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}(x\neq 1)$，求出$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$.

22. 已知 $y=x^3-1$，在点 $x=2$ 处计算当 Δx 分别为 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 dy 之值.

23. 求下列各函数的微分：

(1) $y=\frac{1}{2x^2}$；　　(2) $y=\sin^2 x$；

(3) $y=xe^x$；　　(4) $y=x^{5x}$.

24. 试计算下列各函数值的近似值：

(1) $e^{1.01}$；　　(2) $\cos 151°$.

25. 半径为 r 的金属球加热后，它的半径增加了 Δr，问其表面积增加了多少？

三、分析及解答

(一) 选择题

1. 答案是：D.

分析　函数 $f(x)=|x-2|$ 在点 $x=2$ 处的左、右导数分别为：

$$f'_-(2)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1.$$

同理

$$f'_+(2)=1.$$

由于 $f'_-(2)\neq f'_+(2)$，因此 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数不存在.

故选择 D.

2. 答案是：C.

分析　$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0).$$

而 $f'(x)=-\dfrac{2}{1-2x}$，所以 $f'(x_0)=\dfrac{2}{2x_0-1}$.

故选择 C.

3. 答案是：C.

分析 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim(x+2)=4$，或根据导数定义，$f'(2)=2\times 2=4$.

故选择 C.

4. 答案是：C.

分析 由于 $f'(x)=g'(x)$，有

$$[f(x)-g(x)]'=0,$$

因此

$$f(x)-g(x)=C(\text{常数}).$$

故选择 C.

5. 答案是：C.

分析 由于函数 $f(x)$在 $x=1$ 处左极限为：

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2,$$

而 $f(1)=1$. 可见，$f(x)$在 $x=1$ 处不连续，因此也不可导.

故选择 C.

6. 答案是：B.

分析 $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\sin\Delta x-0}{\Delta x}=1$，

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-\sqrt{1-\Delta x}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{1+\Delta x}+\sqrt{1-\Delta x}}=1.$$

因为 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$，所以 $f'(0)=1$.

故选择 B.

7. 答案是：A.

分析 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x+1)=1$,

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^2=0.$$

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 处没有极限.

故选择 A.

8. 答案是：C.

分析 首先化简 $f(x)$，有

$$f(x)=\frac{2-(2-\ln x)}{2-\ln x}=\frac{2}{2-\ln x}-1,$$

因此

$$f'(x)=-2(2-\ln x)^{-2}\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}(2-\ln x)^{-2},$$

$$f'(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

故选择 C.

9. 答案是：D.

分析 $f'(x)=(\operatorname{arccot}x^2)'=\dfrac{-2x}{1+(x^2)^2}=\dfrac{-2x}{1+x^4}$. 所以

$$f'(x_0)=\frac{-2x_0}{1+x_0^4}.$$

故选择 D.

10. 答案是：D.

分析 由 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$，得到 $f(x)=\dfrac{1}{x}$. 所以

$$f'(x)=-1/x^2.$$

故选择 D.

11. 答案是：D.

分析 根据复合函数求导法则，有

$$y' = f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(-x).$$

故选择 D.

注意 如果函数仅在这一点可导,应使用导数定义导出.

12. 答案是:D.

分析 $y' = (x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$,

$$y'' = \frac{1}{x}, \quad y^{(3)} = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

故选择 D .

13. 答案是:C.

分析 $y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$,

$y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$,

$y''' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$,

…………

$y^{(n)} = (n+x)e^x$.

故选择 C.

14. 答案是:B.

分析 由幂函数的求导法则,有

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1},$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$

…………

$$f^{(n)}(x) = n!.$$

而
$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

故选择 B.

15. 答案是:C.

分析 根据一阶微分形式不变性,有

$$d(\sin 2x) = \cos 2x d(2x) = 2\cos 2x dx.$$

故选择 C.

16. 答案是:D.

分析　$y'=(-\ln 3)'=0$，$dy=0dx=0$.

故选择 D.

17. 答案是：C.

分析　因为

$$y'=-\sin(x^2)\cdot 2x=-2x\sin(x^2),$$

所以 $dy=-2x\sin(x^2)dx$.

故选择 C .

18. 答案是：C.

分析　由题设，可知曲线方程首先满足

$$y'=2x,$$

又由于它过(1,3)点，还应满足

$$y(1)=3.$$

故选择 C.

（二）解答题

1. **解**　(1) $\Delta y=(x+\Delta x)^2+1-x^2-1=2x\Delta x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x,$$

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2x=2x$.

(2)
$$\begin{aligned}\Delta y&=\cos(x+\Delta x+2)-\cos(x+2)\\&=-2\sin\left(x+2+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin\left(x+2+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\sin\left(x+2+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+2+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=-\sin(x+2).$$

2. **解** 在 x_0 点处给出一个增量 Δx，令 $x=x_0+\Delta x$. 于是当 $x\to x_0$ 时，就有 $\Delta x\to 0$. 这样一来

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

3. **解** (1) 由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x},$$

这里把 $-\Delta x$ 当成增量，在 $\Delta x\to 0$ 时，显然 $-\Delta x\to 0$，故(1)正确.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0).$$

故(2)正确. 否则(2)不正确，例如对于 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 的情况，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-|-\Delta x|}{2\Delta x}=0,$$

但在 $f(x)=|x|$ 时，$f'(0)$ 并不存在，故此时(2)不正确.

4. **解** 当 $k=0$ 时，函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处一

定不连续，所以它在 $x=0$ 点不可导；当 $k=1$ 时，函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，但是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

不存在，所以它在点 $x=0$ 处仍不可导；当 $k=2$ 时，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处，有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0,\end{aligned}$$

所以它在点 $x=0$ 处可导，并且 $f'(0)=0$.

5. **答** 不存在. 因为函数在点 $x=0$ 处的右导数

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\sin\Delta x|-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,\end{aligned}$$

而左导数

$$\begin{aligned}f'_-(0)&=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1,\end{aligned}$$

因为 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$，所以函数 $y=|\sin x|$ 在点 $x=0$ 处的导数不存在.

6. **解** 由于当 $x \leqslant x_0$ 时，$f'(x)=(x^2)'=2x$，$f(x)$处处可导；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)=(ax+b)'=a$，$f(x)$处处可导，因此只需要讨论 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的可导性.

根据函数“可导必连续”，首先要求 a,b 满足条件 Ⅰ：

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

即

$$\lim_{x \to x_0^+} (ax+b) = x_0^2,$$

亦即

$$ax_0 + b = x_0^2. \tag{1}$$

再根据函数在一点可导的充要条件：左、右导数存在并相等，又要求 a,b 满足条件 Ⅱ：

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0),$$

即

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0,$$

亦即

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{a(x_0+\Delta x) + b - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

由(1)得到

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(ax_0 + b - x^2) + a\Delta x}{\Delta x} = a = 2x_0. \tag{2}$$

把(1)(2)联立起来，解得

$$\begin{cases} a = 2x_0, \\ b = -x_0^2. \end{cases}$$

图 2-1 给出了当 $a=2x_0$，$b=-x_0^2$ 时，函数 $f(x)$的图象.

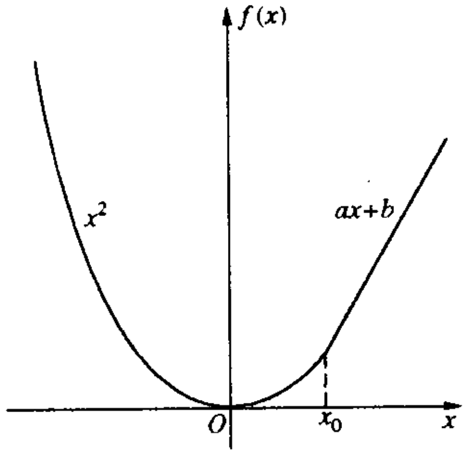


图 2-1

7. **解** (1) 先化简

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1},$$

再由运算法则,有

$$y'=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\left(1+\frac{2}{x-1}\right)'$$

$$=\left(\frac{2}{x-1}\right)'=-\frac{2}{(x-1)^2}.$$

(2) $y'=[(5x+1)(2x^2-3)]'$

$=(5x+1)'(2x^2-3)+(5x+1)(2x^2-3)'$

$=5(2x^2-3)+(5x+1)4x=10x^2-15+20x^2+4x$

$=30x^2+4x-15.$

(3) $y'=(xe^x)'=x'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x.$

(4) $y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x.$

(5) $y'=\left(\frac{2}{x^2-1}\right)'=2\left(\frac{1}{x^2-1}\right)'$

$=-2\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$

(6) $y'=[(x^2-2x+1)^{10}]'=10(x^2-2x+1)^9(x^2-2x+1)'$

$=10(x^2-2x+1)^9(2x-2)=20(x^2-2x+1)^9(x-1).$

(7) $y'=(3\sin x+\cos^2 x)'=3\cos x+2\cos x(\cos x)'$

$=3\cos x-2\cos x\sin x=3\cos x-\sin 2x.$

(8) $y'=\left(\dfrac{\tan x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{(\tan x)'(x^2+1)-(\tan x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{\sec^2 x(x^2+1)-2x\tan x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(x^2+1)\sec^2 x-2x\tan x}{(x^2+1)^2}.$

(9) $y'=(\sin 4x)'=(\cos 4x)(4x)'=4\cos 4x.$

(10) $y'=(10^{6x})'=10^{6x}(\ln 10)(6x)'=6\cdot 10^{6x}\cdot\ln 10.$

(11) $y'=[\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x^2+1)]'=(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})'(x^2+1)+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x^2+1)'$

$=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2}\right)'(x^2+1)+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot 2x$

$=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x^2+4x+1).$

(12) $y'=[\arcsin(2x+3)]'=\dfrac{(2x+3)'}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2-12x-9}}=\dfrac{1}{\sqrt{-(x^2+3x+2)}}.$

(13) $y'=[\ln(\sin x)]'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$

(14) $y'=[(\ln x)^3]'=3\ln^2 x\cdot(\ln x)'=\dfrac{3\ln^2 x}{x}.$

(15) $y'=(\arctan\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{(\sqrt{x^2+1})'}{1+(\sqrt{x^2+1})^2}$

$=\dfrac{\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{2+x^2}=\dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{x^2+1}}.$

(16) $y'=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}}$

$$=-\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}/|x|}=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

(17) $y'=[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$

$$=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

(18) $y'=(x^{\frac{1}{x}})'=\dfrac{1}{x}x^{\frac{1}{x}-1}+x^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'$

$$=\frac{1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{1}{x}}(\ln x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}.$$

(19) $y'=[(\sin x)^{\cos x}]'$

$=\cos x(\sin x)^{\cos x-1}(\sin x)'$

$\quad+(\sin x)^{\cos x}\ln(\sin x)\cdot(\cos x)'$

$=\cos^2 x(\sin x)^{\cos x-1}+(\sin x)^{\cos x}\ln(\sin x)(-\sin x)$

$=(\sin x)^{\cos x}(\cos x\cdot\cot x-\sin x\cdot\ln(\sin x))$.

(20) 首先对 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x(x+3)}}$ 两边取以 e 为底的对数，有

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)-\ln x-\ln(x+3)],$$

然后在等式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right),$$

解出

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x(x+3)}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right).$$

8. **解** $y'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)-\ln 1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=1,$$

但

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2,$$

故 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$. $f'(0)$不存在.

分析 在一般情况下，对于分段函数而言，关键在于研究它的分段点是否可导，因此，常用的方法，是用导数的定义，判断它的分段点的左、右导数是否存在并且相等.

9. **解** 当 $x>0$ 时，$f'_x=2x$，

当 $x<0$ 时，$f'_x=-2e^{2x}$，

当 $x=0$ 时，由定义

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{2x}-0}{x-0}=-2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，故 $f(x)$在 $x=0$ 不可导.

$$f'_x=\begin{cases}-2e^{2x}, & x<0,\\ 2x, & x>0.\end{cases}$$

10. **解** 由于

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2,$$

但

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+3)=5.$$

故 $f(x)$在 $x=1$ 不连续，因此 $f(x)$在 $x=1$ 不可导.

11. **解** 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$$

$$=-2f'(x_0)+f'(x_0),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\dfrac{1}{(-2)f'(x_0)+f'(x_0)}=1.$

12. **解** 由定义

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f[g(x)]-f[g(0)]}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^3\sin\frac{1}{x}}\cdot x^2\sin\frac{1}{x}$$

$$=f'(0)\cdot 0=0.$$

13. **解** (1) 在方程$(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 的两边同时对 x 求导,得到

$$2(x-2)+2(y-3)\cdot y'=0,$$

由此解得

$$y'=\frac{2-x}{y-3}.$$

(2) 在方程 $\cos(xy)=x$ 的两边同时对 x 求导,得到

$$-\sin(xy)\cdot(y+xy')=1,$$

由此解得

$$y'=-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}.$$

(3) 在方程 $y=1+xe^y$ 的两边同时对 x 求导,得到

$$y'=e^y+xe^yy',$$

由此解得

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-(1+xe^y)}=\frac{e^y}{2-y}.$$

(4) 在方程 $x^y=y^x$ 的两边首先取对数,得到

$$y\ln x = x\ln y,$$

然后对 x 求导

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}y',$$

由此解得

$$y' = \frac{\ln y - \dfrac{y}{x}}{\ln x - \dfrac{x}{y}} = \frac{xy\ln y - y^2}{xy\ln x - x^2}.$$

14. **解** 首先求出切线的斜率. 根据隐函数求导法则，在方程 $x^2+3xy+y^2+1=0$ 两边同时对 x 求导，得到

$$2x + 3(y + xy') + 2y \cdot y' = 0,$$

由此解得

$$y' = -\frac{3y + 2x}{2y + 3x},$$

于是在 $M(2,-1)$处的切线的斜率为

$$k_1 = y'\Big|_{(2,-1)} = -\frac{1}{4}.$$

再由直线方程的点斜式，得到切线方程为

$$y = -\frac{1}{4}(x-2) - 1 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2};$$

根据法线定义以及两条直线相互垂直的充要条件，得到其法线斜率为

$$k_2 = 4,$$

所求法线方程为

$$y=4(x-2)-1=4x-9.$$

15. **解** (1) $y'=\dfrac{(x-1)'(x+1)^2-(x-1)[(x+1)^2]'}{(x+1)^4}$

$$=\frac{(x+1)^2-(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^3}=\frac{3-x}{(x+1)^3},$$

$$y''=\frac{(3-x)'(x+1)^3-(3-x)[(x+1)^3]'}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)^3-(3-x)3(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)-3(3-x)}{(x+1)^4}=\frac{2x-10}{(x+1)^4}.$$

(2) $y'=x'e^{x^2}+x(e^{x^2})'=e^{x^2}+x(2xe^{x^2})$

$=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$,

$y''=2xe^{x^2}+4xe^{x^2}+2x^2\cdot 2xe^{x^2}$

$=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}=2xe^{x^2}(3+2x^2)$.

(3) $y'=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x$

$=e^x(\cos x-\sin x)$,

$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)'$

$=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$=e^x(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$.

(4) $y'=(\ln\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$y''=-\csc^2 x$.

16. **解** $y=\dfrac{1}{2}\ln(1-x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$,

$$y'=\frac{-1}{2(1-x)}-\frac{x}{1+x^2},$$

$$y''=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad y''|_{x=0}=-\frac{3}{2}.$$

17. **解** $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y'''=\frac{3x}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

故 $$y'''|_{x=\sqrt{3}}=\frac{5}{32}.$$

18. **解** 对 $x+2y-\cos y=0$,两边对 x 求导,得到

$$1+2\frac{dy}{dx}+\sin y\frac{dy}{dx}=0,$$

即 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2+\sin y}.$$

两边对 x 再求导,这里 y 和 $\frac{dy}{dx}$ 是 x 的函数,故

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\cos y)(2+\sin y)^{-2}=0,$$

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\cos y}{(2+\sin y)^2}.$$

19. **证明** 由函数 $y=e^x\sin x$,求得

$$y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x),$$

$$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x,$$

于是有

$$y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2e^x(\sin x+\cos x)+2e^x\sin x=0.$$

20. **证明** 由函数 $y=e^{-\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}$ 求得

$$\begin{aligned}
y'&=e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x})'+e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''&=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})\\
&\quad+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})\right)
\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+\frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}),$$

于是有

$$\begin{aligned}
&xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y \\
&=x\left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+\frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})\right) \\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})\right)-\frac{1}{4}(e^{-\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}) \\
&=-\frac{1}{4\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})+\frac{1}{4}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}) \\
&\quad+\frac{1}{4\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})-\frac{1}{4}(e^{-\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}) \\
&=0.
\end{aligned}$$

21. **解**　在恒等式两边同时对 x 求导,有

$$\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\right)'=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)',$$

即

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)'=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2},$$

于是得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}&=1+2x+\cdots+nx^{n-1} \\
&=\frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

22. **解**　由函数 $y=x^3-1$,求出在点 $x=2$ 处的 Δy 及 dy:

$$\begin{aligned}
\Delta y\Big|_{x=2}&=\left[(x+\Delta x)^3-1-(x^3-1)\right]\Big|_{x=2} \\
&=\left[3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right]\Big|_{x=2}
\end{aligned}$$

$$= 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$dy\Big|_{x=2} = (y'dx)\Big|_{x=2} = 3x^2dx\Big|_{x=2}$$

$$= 12dx = 12\Delta x;$$

当 $\Delta x=1$ 时,$\Delta y=19$,$dy=12$;

当 $\Delta x=0.1$ 时,$\Delta y=1.261$,$dy=1.2$;

当 $\Delta x=0.01$ 时,$\Delta y=0.120601$,$dy=0.12$.

23. **解** (1) $dy=\left(\frac{1}{2x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}(-2x^{-3})dx=-\frac{1}{x^3}dx.$

(2) $dy=(\sin^2 x)'dx=2\sin x\cdot\cos x dx$

$=\sin 2x dx.$

(3) $dy=(xe^x)'dx=(e^x+xe^x)dx$

$=(1+x)e^x dx.$

(4) $dy=(x^{5x})'dx=(5x\cdot x^{5x-1}+x^{5x}\ln x\cdot 5)dx$

$=5x^{5x}(1+\ln x)dx.$

24. **解** (1) 设 $y=e^x$,则 $y'=e^x$. 根据微分近似计算公式:

$$f(x_0+\Delta x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

取 $x_0=1$,$\Delta x=0.01$,并考虑到 $f(x_0)=e^1=e$,$f'(x_0)=e$,所以

$$e^{1.01}\doteq e+e\times 0.01=1.01e\doteq 2.7455.$$

(2) 设 $y=\cos x$,则 $y'=-\sin x$. 根据微分近似计算公式:

$$f(x_0+\Delta x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

取 $x_0=\frac{5}{6}\pi$,$\Delta x=\frac{\pi}{180}$,并考虑到

$$f(x_0)=\cos\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'(x_0)=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{2},$$

所以

$$\cos 151^\circ=\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\doteq\cos\frac{5}{6}\pi-\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}\doteq-0.8747.$$

25. **解**　由球的表面积公式：

$$S=4\pi r^2,$$

则

$$S'=8\pi r,\quad \mathrm{d}S=8\pi r\mathrm{d}r,$$

于是

$$\Delta S\doteq\mathrm{d}S=8\pi r\Delta r.$$

这就是说，当球半径增加了 Δr 时，其表面积增加了约为 $8\pi r\Delta r$.

第三章 中值定理与导数的应用

一、内容提要

（一）重要概念及性质

1. 函数的极值

定义 3.1 设函数 $y=f(x)$ 在 $N(x_0)$ 内有定义，如果

$$f(x) < f(x_0), \quad 任意的\ x \in N(\bar{x}_0),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得**极大值**；如果

$$f(x) > f(x_0), \quad 任意的\ x \in N(\bar{x}_0),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得**极小值**.

函数的极大值与极小值统称为**极值**. 使函数取得极值的点称为**极值点**. 例如，函数 $f(x)=x^2$ 在点 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$，则点 $x=0$ 就是 $f(x)=x^2$ 的极小值点.

2. 曲线的凹凸性

定义 3.2 若曲线弧位于它每一点的切线的上方，则称此曲线弧是**凹**的；若曲线弧位于它每一点的切线的下方，则称此曲线弧是**凸**的.

3. 曲线的拐点

定义 3.3 连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为曲线的**拐点**.

4. 曲线的渐近线

定义 3.4 如果点 M 沿曲线 $y=f(x)$ 离坐标原点无限远移时，M 与某一条直线 L 的距离趋近于零，则称直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的一条**渐近线**，并且

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**垂直渐近线**；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$，则 $y=A$ 或 $y=B$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**.

5. 函数的最大值、最小值

定义 3.5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若存在 x_1,x_2 使得

$$f(x) \leqslant f(x_1) = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\},$$

$$f(x) \geqslant f(x_2) = \min_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\},$$

则称 x_1,x_2 分别称为函数的**最大值点与最小值点**；称 $f(x_1),f(x_2)$ 分别为函数的**最大值与最小值**.

函数的最大值与最小值统称为**最值**；使函数取得最值的点称为**最值点**. 注意

(1) 函数的最值点不一定惟一，例如，$y=|x|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值点为 ±1；

(2) 函数的最值概念是一个区别极值的整体概念，它一般是在连续区间上定义的.

(二) 重要定理及公式

定理 3.1 罗尔定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且 $f(a)=f(b)$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 x_0，使得 $f'(x_0)=0$.

定理 3.2 拉格朗日中值定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 x_0，使得

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a).$$

推论 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处的导数都是零，即 $f'(x)=0(a<x<b)$，那么函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为一常数.

推论 2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处的导数都相等，即 $f'(x)=g'(x)$，那么这两个函数在区间 (a,b) 内最多相差一个常数.

定理 3.3 柯西中值定理 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且在 (a,b) 内每一点处均有 $g'(x)\neq 0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 x_0，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

定理 3.4（洛必达法则 Ⅰ） 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $N(\bar{a})$ 内处处可导，并且 $g'(x)\neq 0$. 如果

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a} g(x)=0,$$

而极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\quad (l\text{ 为有限或 }\infty),$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

定理 3.5（洛必达法则 Ⅱ） 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $N(\bar{a})$ 内处处可导，并且 $g'(x)\neq 0$. 如果

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

而极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\quad (l\text{ 为有限或 }\infty),$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

定理 3.6（函数取得极值的必要条件） 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并且在 x_0 处 $f(x)$ 取得极值，则它在该点的导数 $f'(x_0)=0$.

这个定理又称为**费马(Fermat)定理**. 它的几何意义是，当一条连续、光滑的曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处取得极值时，它在该点处的切线一定平行于 x 轴.

我们把使得导数 $f'(x)$ 为零的点称为函数 $f(x)$ 的**驻点**（或称为**稳定点**）. 因此，费马定理告诉我们：可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点.

定理 3.7（函数单调性的充分条件） 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且导函数 $f'(x)$ 不变号.

(1) 若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是递增的；

(2) 若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是递减的.

注意 这个定理只是判定函数单调性的充分条件，而不是必要条件. 当函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内，除了在个别点处为零外均为正值（或负值）时，函数 $f(x)$ 在这个区间内仍是单调递增（或递减）的.

定理 3.8（函数取得极值的第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 $N(x_0)$ 内可导，并且 $f'(x_0)=0$.

(1) 若当 $x\in N^-(\bar{x}_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in N^+(\bar{x}_0)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

(2) 若当 $x\in N^-(\bar{x}_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in N^+(\bar{x}_0)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

定理 3.9（函数取得极值的第二种充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$.

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

注意 当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在时，特别是当 $f'(x)$ 的符号不易直接判定时，我们可以利用这个定理来判定函数的极值.

定理 3.10（曲线凹凸性的判别性） 设函数 $f(x)$ 在区间

(a,b)上具有二阶导数 $f''(x)$，则在该区间上：

(1) 当 $f''(x)>0$ 时，曲线弧 $y=f(x)$是凹的；

(2) 当 $f''(x)<0$ 时，曲线弧 $y=f(x)$是凸的.

如何判别曲线在某一区间上的凹凸性呢？我们知道，若曲线是凸弧，则当 x 由小变大时，x 轴与曲线的切线的夹角是减小的，即切线的斜率是递减的；若曲线是凹弧，则当 x 由小变大时，x 轴与曲线的切线的夹角是增大的，即切线的斜率是递增的. 从而我们可以根据函数的一阶微商是递增的还是递减的，或根据它的二阶微商是正的还是负的来判别它的凹凸性. 定理 3.10 给出曲线凹凸性的判别法.

定理 3.11(拐点的判定法)　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上有二阶连续导数 $f''(x)$. 若 x_0 是(a,b)内一点.

(1) 当 $f''(x)$ 在 x_0 附近的左边和右边不同号时，点$(x_0,f(x_0))$是 $y=f(x)$的一个拐点；

(2) 当 $f''(x)$在 x_0 附近的左边和右边同号时，点$(x_0,f(x_0))$不是 $y=f(x)$的拐点.

一般来说，函数 $y=f(x)$的二阶导数为零或不存在的点可能是拐点，利用二阶微商的符号来判别曲线的拐点，定理 3.11 给出了判别的方法.

(三) 重要方法

1. 函数的微分作图法

函数的微分法作图，一般可以分这样几个步骤来完成：

(1) 求出函数 $f(x)$的定义域，确定图形的范围；

(2) 讨论函数的奇偶性和周期性，确定图形的对称性和周期；

(3) 找出渐近线，确定图形的变化趋势；

(4) 计算函数的一阶导数 $f'(x)$与函数的二阶导数 $f''(x)$；

(5) 列表讨论函数图形的升降、凹凸、极值和拐点；

(6) 适当选取一些辅助点，一般常找出曲线和坐标轴的交点.

在作图时，要具体情况具体分析，不一定对上述几点都讨论.

2. 函数的最大值、最小值的求法

定理 1.5 告诉我们，闭区间上的连续函数一定可以取得最大值与最小值. 一般来说，如果函数在开区间内取得最值，那么这个最值一定也是函数的一个极值. 由于连续函数取得极值的点只可能是该函数的驻点或不可导点，又由于函数的最值也可能在区间的端点上取得. 因此，求函数最值的步骤是：首先找出函数在区间内所有的驻点和不可导点，然后计算出它们及端点的函数值，最后再将这些值进行比较，其中最大(小)者就是函数在该区间上的最大(小)值.

需要说明的是，对于某些实际问题，如果我们能够根据问题本身的特点判断出函数应该有一个不在区间端点上取值的最值，而且在区间内该函数只有一个驻点(或不可导点)，那么这个点就是函数的最值点.

例 1 做一容积为 V 的圆柱形罐头筒，问怎样设计，才能使所用的材料最省？

解 由题意可知，在罐头筒的表面积最小时，材料最省. 设罐头筒的高为 h，底面积半径为 r，罐头筒表面积为 S，则：侧面积 $=2\pi rh$，底面积 $=2\pi r^2$，罐头筒的表面积 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，罐头的体积 $V=\pi r^2h$. 故

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r}\quad(r>0),$$

$$S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{2(2\pi r^3-V)}{r^2}.$$

令：$S'=0$，得驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 驻点惟一，由题意可知，在 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，罐头筒的表面积最省. 此时高为

$$h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r.$$

因此,在罐头筒的高和底的直径相等时,所用的材料最省.

例 2 某公司每月销售商品 Q 件时,总收入函数为 $R(Q)=1\,000Qe^{-\frac{Q}{100}}$(元),$Q>0$,问每月销售多少件商品时总收入最大?总收入是多少?

解 此题是求在 Q 取何值时,总收入 $R(Q)$ 最大.

$$R'(Q)=1\,000\left[e^{-\frac{Q}{100}}-\frac{Q}{100}e^{-\frac{Q}{100}}\right]$$
$$=1\,000e^{-\frac{Q}{100}}\left(1-\frac{Q}{100}\right).$$

令 $R'(Q)=0$,有 $Q=100$. $R(Q)$ 只有一个驻点,由题意可知,在 $Q=100$ 时,$R(100)=\frac{10^5}{e}\approx 36\,788$,即每月销售 100 件商品时,可使总收入最大,近似为 36 788 元.

3. 其他类型的极限未定式的计算

除了$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式外,还有 $0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞和∞^0 等类型的不定式. 这些类型的未定式求极限的方法是先把它们化成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,然后再分别使用洛必达法则 Ⅰ,Ⅱ.

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec x=\infty$,$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$,因此这是一个$\infty-\infty$型的不定式. 我们可以把它化成

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

这样一来,就变成了$\frac{0}{0}$型的不定式,由法则 Ⅰ 得到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,因此这是一个 0^0 型不定式. 设 $y=x^x$. 取对数得到 $\ln y=x\ln x$,当 $x\to 0^+$ 时就变成了 $0\cdot\infty$型的不定式;再写成$\frac{\ln x}{1/x}$的样式,从而化成了$\frac{\infty}{\infty}$型的不定式,由法则 Ⅱ 得到

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\ln x^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln x$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

因为 $y=e^{\ln y}$,且

$$\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y},$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}y=e^0=1.$$

二、习题

(一) 选择题

1. 在区间$[-1,1]$上,下列函数中不满足罗尔定理的是(　　).

(A) $f(x)=e^{x^2}-1$;　　(B) $f(x)=\ln(1+x^2)$;

(C) $f(x)=\sqrt{x}$;　　(D) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

2. 函数 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在$[0,3]$上满足罗尔定理的 $\xi=$(　　).

(A) 0;　(B) 3;　(C) 3/2;　(D) 2.

3. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$,则方程 $f'(x)=0$ 有(　　).

(A) 一个实根；　　　　(B) 两个实根；

(C) 三个实根；　　　　(D) 无实根.

4. 函数 $f(x)=x^3+2x$ 在区间$[0,1]$上满足拉格朗日定理条件,则定理中的 $\xi=($　　$)$.

(A) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$；　(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$；　(C) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$；　(D) $\sqrt{3}$.

5. 设 $y=x^3$ 在闭区间$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理,则定理中的 $\xi=($　　$)$.

(A) $-\sqrt{3}$；　(B) $\sqrt{3}$；　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$；　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$是哪种类型未定式的极限(　　).

(A) $\infty-\infty$；　(B) $\infty\cdot 0$；　(C) $\infty+\infty$；　(D) $\infty\cdot\infty$.

7. 下列求极限问题中能够使用洛必达法则的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；　　(B) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sin bx}$；

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$；　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

8. 函数 $y=x^2+1$ 在区间$[0,2]$上(　　).

(A) 单调增加；　　　　(B) 单调减少；

(C) 不增不减；　　　　(D) 有增有减.

9. 函数 $y=x-\ln(1+x^2)$在定义域内(　　).

(A) 无极值；　　　　(B) 极大值为 $1-\ln2$；

(C) 极小值为 $1-\ln2$；　　(D) $f(x)$为非单调函数.

10. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $x\in[-\pi,\pi]$上的极大值点 $x_0=$(　　).

(A) π；　　(B) $-\pi$；　　(C) $\frac{\pi}{2}$；　　(D) 0.

11. $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有极值的一个(　　).

(A) 必要条件；　　(B) 充要条件；

(C) 充分条件；　　(D) 无关条件.

12. 函数 $y=(x+1)^3$ 在区间 $(-1,2)$ 内(　　).

(A) 单调增；　　(B) 单调减；

(C) 不增不减；　　(D) 有增有减.

13. 函数 $y=|x-1|+2$ 的最小值点是 $x=$(　　).

(A) 0；　　(B) 1；　　(C) 2；　　(D) -1.

14. 设 $f(x)=x^4-2x^2+5$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的(　　).

(A) 极小值；(B) 最小值；(C) 极大值；(D) 最大值.

15. 函数 $y=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$(　　).

(A) 有极大值 0；　　(B) 有极大值 1；

(C) 有极小值 -1；　　(D) 无极值.

16. 曲线 $y=\frac{4x-1}{(x-2)^2}$(　　).

(A) 只有水平渐近线；

(B) 只有垂直渐近线；

(C) 没有渐近线；

(D) 有水平渐近线也有垂直渐近线.

17. 曲线 $y=|x+2|$ 在区间 $(0,4)$ 内(　　).

(A) 上凹；　　(B) 下凹；

(C) 既有上凹又有下凹；　　(D) 直线段.

18. 曲线 $y=e^{-x^2}$(　　).

(A) 没有拐点；　　(B) 有一个拐点；

(C) 有两个拐点；　　(D) 有三个拐点.

（二）解答题

1. 设 $f'(x)=a$，试证 $f(x)=ax+b$.

2. 验证下面的函数是否满足罗尔定理，并求出定理中的数值 ξ：

$$f(x) = x\sqrt{4-x}, \quad x \in [0,4].$$

3. 写出函数 $y=x^3$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的拉格朗日公式，并求出公式中的 x_0.

4. 若 $x\in[0,1]$，证明 $x^3+x-1=0$ 仅有一个根.

5. 用中值定理证明下面各不等式：

(1) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$；

(2) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ (x>0)$；

(3) $e^x>1+x\ (x\neq0)$.

6. 用中值定理证明下面各等式：

(1) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$；

(2) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

7. 若 $|x|\leqslant1$，证明 $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$.

8. 用洛必达法则求下列各式的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\cot x}{\ln x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0+0}x^a\cdot\ln x\ (a>0)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan3x}{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)x\ (a>0)$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；　　(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{5x}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；　　(14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}$.

9. 求下面各极限，并指出能否使用洛必达法则？为什么？

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

10. 求下列各函数的单调区间：

(1) $y=2x^3+3x^2-12x+1$；　　(2) $y=x-e^x$；

(3) $y=x+\cos x$；　　(4) $y=x-\ln(1+x)$.

11. 求下列函数的极值：

(1) $y=2x^3-3x^2$；　　(2) $y=x^2\ln x$；

(3) $y=x-\sin x$；　　(4) $y=2e^x+e^{-x}$.

12. 求下列各函数在指定区间上的最大值与最小值：

(1) $y=x^3-3x^2+6x-2$，在区间$[-1,1]$上；

(2) $y=x^2e^{-x}$，在区间$[-1,3]$上.

13. 证明：设 $x>0,n>1$，则$(1+x)^n>1+nx$.

14. 求下列各函数图形的凹凸区间及拐点：

(1) $y=x^2e^{-x}$；　　(2) $y=\ln(x^2+1)$.

15. 作出函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$的图形.

16. 作出函数 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$的图形.

三、分析及解答

（一）选择题

1. 答案是：C.

分析　由于函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为 $x\geqslant 0$，因此在$[-1,1]$上不满足罗尔定理的条件.

故选择 C.

2. 答案是：D.

分析 因为 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在 $[0,3]$ 上连续，又因为

$$f'(x)=\sqrt{3-x}+\frac{-x}{2\sqrt{3-x}}=\frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$$

在 $(0,3)$ 上有定义，即 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上可导. 又因为

$$f(0)=0\sqrt{3-0}=0,\quad f(3)=3\sqrt{3-3}=0,$$

满足 $f(0)=f(3)$，所以 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在 $[0,3]$ 上满足罗尔定理，因此至少有一点 ξ 使 $f'(\xi)=0$. 因为 $f'(\xi)=\dfrac{3\times(2-\xi)}{2\times\sqrt{3-\xi}}=0$，所以 $\xi=2$.

故选择 D.

3. 答案是：B.

分析 $f(1)=f(2)=f(3)=0$，$f(x)$ 在 $[1,2]$，$[2,3]$ 上满足罗尔定理条件. 因此在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ_1，使 $f'(\xi_1)=0$，ξ_1 是 $f'(x)$ 的一个实根. 在 $(2,3)$ 内至少存在一点 ξ_2，使 $f'(\xi_2)=0$，ξ_2 也是 $f'(x)$ 的一个实根. $f'(x)$ 为二次多项式，只能有两个实根，它们分别在区间 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内.

故选择 B.

4. 答案是：B.

分析 这里 $a=0$，$b=1$，$f(0)=0$，$f(1)=3$，由拉格朗日公式

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=(3x^2+2)\Big|_{x=\xi},$$

所以
$$3=3\xi^2+2,\quad \xi^2=\frac{1}{3},\quad \xi=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

故选择 B.

5. 答案是：D.

分析 由中值定理

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

有 $f'(\xi)=1$. 由于

$$f'(x)=3x^2=1,$$

解得
$$\xi=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

考虑到在区间[0,1]上满足定理,因此只能取 $\xi=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选择 D.

6. 答案是: B.

分析 当 $x\to+\infty$ 时,由于 $\arctan x\to\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\frac{\pi}{2}-\arctan x\to 0.$$

因此 $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ 是 $\infty\cdot 0$ 型未定式.

故选择 B.

7. 答案是: D.

分析 对于(A),若使用洛必达法则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$

不能求出极限,故不能使用洛必达法则.

对于(B),不属于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限,故不能使用洛必达法则.

对于(C),若使用洛必达法则:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x},$$

不能求出极限,故不能使用洛必达法则.

对于(D),

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}},$$

变为求$\frac{0}{0}$型极限,可以使用洛必达法则来求极限.

故选择 D.

8. 答案是:A.

分析 $y'=2x$,$2x$ 在区间$[0,2]$上只有当 $x=0$ 时,$y'=0$,其余均有 $y'>0$,故 y 在区间$[0,2]$上单调增加.

故选择 A.

9. 答案是:A.

分析 $f(x)$定义域为$(-\infty,+\infty)$,

$$y'=1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{(1-x)^2}{1+x^2}.$$

因为 $1+x^2>0$,$(1-x)^2\geqslant 0$,故只有当 $x=1$ 时,$f'(0)=0$,对其余的 x 均有 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加,故函数 y 在定义域内无极值.

故选择 A.

10. 答案是:D.

分析 由 $y'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$ 得到

$$x+\frac{\pi}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

当 $x\in[-\pi,\pi]$时,驻点为$\pm\pi$和 0. 又由于

$$y''=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

而

$$y''|_{x=0}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0,$$

因此 $x=0$ 为极大值点.

故选择 D.

11. 答案是：C.

分析 由于当 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定有极小值，反之不真.

故选择 C.

12. 答案是：A.

分析 由

$$y' = 3(x+1)^2 \geqslant 0$$

可知函数 $y=(x+1)^3$ 在区间 $(-1,2)$ 内是一个单调递增函数.

故选择 A.

13. 答案是：B.

分析 由于函数

$$f(x) = |x-1| + 2 \geqslant 2,$$

因此当 $x=1$ 时 $f(1)=2 \leqslant f(x)$.

因此选择 B.

14. 答案是 C.

分析 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=-1$. $y''=12x^2-4$，$f''(0)=-4<0$，$f''(1)=f''(-1)=8>0$. $f(\pm 1)=4$，$f(\pm 2)=13$，$f(0)=5$. 故 $f(0)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的极大值.

故选择 C.

15. 答案是：A.

分析 $f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}$. 当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$；当 $x=0$ 时，$f'(x)$ 不存在. 所以函数只能在这两个点取得极值. 如下表所示.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 $-\frac{1}{2}$	↗

可见 $f(x)$在 $x=0$ 处有极大值 0,在 $x=1$ 时,有极小值$-\frac{1}{2}$.

故选择 A.

16. 答案是:D.

分析 由于

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{(x-2)^2}=\infty,$$

所以 $x=2$ 是它的一条垂直渐近线. 又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{(x-2)^2}=0,$$

所以 $y=0$ 是它的一条水平渐近线.

故选择 D.

17. 答案是:D.

分析 由于当 $x\in(0,4)$时,

$$y=|x+2|=x+2.$$

故选择 D.

18. 答案是:C.

分析 由 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$,

$$f''(x)=4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}=4\left(x^2-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2},$$

解 $f''(x)=0$,得到 $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;并且 $f''(x)$在$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$两边异号. 因此

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ 及 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

为曲线的拐点.

故选择 C.

(二) 解答题

1. **证明** 设 $g(x)=f(x)-ax$,则

$$g'(x)=f'(x)-a=a-a=0.$$

根据中值定理的推论 1：如果函数在区间内每一点处的导数都是零，那么函数在区间内为一常数. 不妨假设 $g(x)=b$，即

$$f(x)-ax=b.$$

于是有

$$f(x)=ax+b.$$

2. **解** (1) $f(x)=x\sqrt{4-x}$，在$[0,4]$上连续；

(2) $$f'(x)=\sqrt{4-x}+\frac{-x}{2\sqrt{4-x}}=\frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}}$$
$$=\frac{8-2x-x}{2\sqrt{4-x}}=\frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}.$$

故 $f(x)$在$(0,4)$上可导.

(3) $f(0)=0, f(4)=0$.

由上述(1)，(2)，(3)可知 $f(x)$满足罗尔定理的条件. 由罗尔定理可知：存在 $\xi\in(0,4)$，使

$$f'(\xi)=0,$$

故

$$f'(\xi)=\frac{8-3\xi}{2\sqrt{4-\xi}}=0,$$

即

$$\xi=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

3. **解** 由于函数 $f(x)=x^3$ 在区间$[0,1]$上连续，在区间$(0,1)$内可导，根据拉格朗日公式，有

$$f(1)-f(0)=f'(x_0)(1-0),$$

即

$$1^3-0^3=3x_0^2(1-0);$$

由上式解得 $x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，又由于 $x_0\in(0,1)$，所以

$$x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. **证** 先证明根的存在性：设 $f(x)=x^3+x-1$，且 $f(0)=$

$-1<0, f(1)=1>0$,由于在 $x\in[0,1]$时,$f(x)$是连续函数,故由连续函数的中间值定理可知,必存在一个点 $c\in(0,1)$,使 $f(c)=0$,因此给定的方程存在一个根.

惟一性:应用反证法,假设方程有两个根 x_1,x_2,则有 $f(x_1)=f(x_2)=0$,由于 $f(x)$是多项式,故它在(x_1,x_2)可微,由罗尔定理可知:存在 $\xi\in(x_1,x_2)$,使得 $f'(\xi)=0$,但在 $x\in[0,1]$时,$f'(x)=3x^2+1\geqslant1$,故 $f'(x)$不可能为 0,这就产生矛盾,因此 $f(x)$不可能有两个根.

5. **证明** (1) 设函数 $f(u)=\arctan u$,则 $f(x)=\arctan x$,$f(y)=\arctan y$,$f'(u)=\frac{1}{1+u^2}$.为了讨论方便,不妨假设 $x<y$,由拉格朗日中值定理可知:存在 $C\in(x,y)$使得

$$f(y)-f(x)=f'(C)(y-x)$$

成立,即

$$\arctan y-\arctan x=\frac{1}{1+C^2}(y-x).$$

将上式两边取绝对值,并考虑到$\left|\frac{1}{1+C^2}\right|\leqslant1$,所以

$$|\arctan x-\arctan y|=\left|\frac{1}{1+C^3}\right|\cdot|x-y|\leqslant|x-y|,$$

即

$$|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|.$$

(2) 设函数 $f(u)=\ln(1+u)$,则有 $f'(u)=\frac{1}{1+u}$,并且对任意 $x>0$,函数 $f(u)$在区间$[0,x]$上应用拉格朗日中值定理,得到

$$f(x)-f(0)=f'(C)(x-0),$$

其中 $0<C<x$,即

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+C}.$$

又由于 $1<1+C<1+x$,有

$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+C}<1,$$

考虑到 $x>0$,有

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+C}<x,$$

于是得到

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad (x>0).$$

(3) 设函数 $f(u)=e^u$,则有 $f'(u)=e^u$,并且对任意的 $x\neq 0$,函数 $f(u)$在以 0 和 x 为端点的区间上应用拉格朗日中值定理,得到

$$f(x)-f(0)=f'(C)(x-0),$$

其中 C 是区间内的一点,即

$$e^x-1=e^C x.$$

当 $x>0$ 时,$x>C>0$,有 $e^C>1$,$xe^C>x$;当 $x<0$ 时,$x<C<0$,有 $e^C<1$,$xe^C>x$,因此,对 $x\neq 0$ 总有

$$e^C x>x$$

成立. 于是得到

$$e^x-1>x \quad (x\neq 0),$$

即

$$e^x>1+x \quad (x\neq 0).$$

6. **证明** (1) 设函数 $f(u)=\arctan u-\arcsin\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$,则

$$f'(u)=(\arctan u)'-\left(\arcsin\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)'$$

$$=\frac{1}{1+u^2}-\frac{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{1+u^2}}}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{\dfrac{\sqrt{1+u^2} - u(\sqrt{1+u^2})'}{1+u^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{1+u^2}}}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{\sqrt{1+u^2} - u\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)\sqrt{\dfrac{1}{1+u^2}}}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}}{(1+u^2)\sqrt{\dfrac{1}{1+u^2}}}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u^2} = 0,$$

并且 $f(0)=\arctan 0-\arcsin\dfrac{0}{\sqrt{1+0^2}}=0.$

在以 0 和 x 为端点的区间上应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x) - f(0) = f'(C)(x-0),$$

即

$$\arctan x - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 0 = 0(x-0).$$

于是得到

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(2) 设函数 $f(u)=\arcsin u+\arccos u$，则

$$f'(u) = (\arcsin u)' + (\arccos u)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right) = 0,$$

并且 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}.$

在以 0 和 x 为端点的区间上应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x)-f(0)=f'(C)(x-0),$$

即

$$\arcsin x+\arccos x-\frac{\pi}{2}=0,$$

于是得到

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

7. **证** 设

$$f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-2\arctan x,$$

故

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}-2\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}-\frac{2}{1+x^2},$$

故在 $x\in(-1,1)$时，

$$f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}-\frac{2}{1+x^2}=0.$$

由中值定理推论 1，可知 $f(x)$在 $x\in[-1,1]$时，为一个常数. 即

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-2\arctan x=C.$$

由于 $x=0\in[-1,1]$，故 $C=0$. 因此

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-2\arctan x=0,$$

即

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x.$$

8. **解** (1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)'}{(x^n-1)'}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\quad(n\neq0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)'}{(3^x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2}{3^x\ln 3}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\cot x)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin^2 x}=+\infty.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(x^{-\alpha})'}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^\alpha}{\alpha}=0.$$

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\tan 3x)'}{(\tan x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=3\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}$

$$=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2 x)'}{(\cos^2 3x)'}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x(-\sin x)}{6\cos 3x(-\sin 3x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin 6x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin 2x)'}{(\sin 6x)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2x}{6\cos 6x}=\frac{1}{3}.$$

(7) 这是 0^0 型，令 $y=x^{\sin x}$，则 $\ln y=(\sin x)\ln x$.

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

(8) 这是 $0\cdot\infty$型，由$(a^{\frac{1}{x}}-1)x=\dfrac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}$，有

$$\lim_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)x=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a^{\frac{1}{x}}-1)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}a^{\frac{1}{x}}\ln a=\ln a.$$

(9) 这是$\infty-\infty$型，由$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$，有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{[x(e^x-1)]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

(10) **方法一** 这虽然是$\dfrac{0}{0}$型的，但不能直接使用洛必达法则，为此先把原式变成

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

由于分子 x^{-100}的导数$(x^{-100})'=-100x^{-101}$，而分母 $e^{\frac{1}{x^2}}$的导数$(e^{\frac{1}{x^2}})'=e^{\frac{1}{x^2}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}$. 可见应用一次洛必达法则以后，它仍然是$\dfrac{0}{0}$型的，但分子上的幂函数的指数增加了 2，并且其系数由

1 变成了$\frac{100}{2}=50$,即

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{-100x^{-101}}{-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{50x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

这时,可以继续使用洛必达法则,直到分子上的幂函数的指数增加到 0 为止. 这样,一共应用 50 次洛必达法则,有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}&=\lim_{x\to0}\frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{50x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\\&=\cdots\cdots\\&=\lim_{x\to0}\frac{50\cdot49\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0.\end{aligned}$$

方法二 令 $t=\frac{1}{x^2}$,这样当 $x\to0$ 时,$t\to+\infty$,于是

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{-50}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t},$$

这仍是$\frac{\infty}{\infty}$型的,应用洛必达法则 50 次,有

$$原式=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0.$$

(11) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(e^{x\ln x})'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x\ln x}(1+\ln x)}{1+\ln x}$
$=\lim\limits_{x\to1}e^{x\ln x}=1.$

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{5\cdot e^{5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{5^2e^{5x}}\cdots$(应用洛必达法则 n 次)$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{5^ne^{5x}}=0.$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}$,由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}=1,$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

(14) $$\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}{-\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

9. **解** (1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

这个未定式极限虽然是$\frac{\infty}{\infty}$型的，但不能使用洛必达法则，因为分子、分母分别求导以后，它们比值的极限不存在，即极限
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\tan^2\frac{x}{2}$$
是不存在的.

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=1\times0=0.$$

这个未定式极限虽然是$\frac{0}{0}$型的，但不能使用洛必达法则，因为分子、分母分别求导以后，它们比值的极限不存在，即极限
$$\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

是不存在的.

10. **解** (1) 函数 $y=2x^3+3x^2-12x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2),$$

令 $y'=0$, 解得: $x_1=1$, $x_2=-2$, 这样我们就可以分成 $(-\infty,-2)$, $(-2,1)$, $(1,+\infty)$ 三个区间来讨论. 当 $x<-2$ 时, $y'>0$; 当 $-2<x<1$ 时, $y'<0$; 当 $x>1$ 时, $y'>0$.

由此得出, 函数 $y=2x^3+3x^2-12x+1$ 在 $(-\infty,-2)$, $(1,+\infty)$ 内递增, 在 $(-2,1)$ 内递减.

(2) 函数 $y=x-e^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于

$$y' = 1 - e^x,$$

令 $y'=0$, 解得: $x=0$, 这样我们就可以分成 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 两个区间来讨论. 当 $x<0$ 时, $e^x<1$, 则 $y'>0$; 当 $x>0$ 时, $e^x>1$, 则 $y'<0$.

由此得出, 函数 $y=x-e^x$ 在 $(-\infty,0)$ 内递增, 在 $(0,+\infty)$ 内递减.

(3) 函数 $y=x+\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于

$$y' = 1 - \sin x,$$

令 $y'=0$, 解得: $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 但是除了这些点以外, 因为 $|\sin x|<1$, 所以

$$y' = 1 - \sin x > 0.$$

根据判别函数单调性的充分条件可以得出, 函数 $y=x-e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内递增.

(4) 函数 $y=x-\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$. 由于

$$y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

令 $y'=0$, 解得: $x=0$, 这样我们就可以分成 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 两个区间来讨论. 当 $-1<x<0$ 时, $y'<0$; 当 $x>0$ 时, $y'>0$.

由此得出，函数 $y=x-\ln(1+x)$ 在 $(-1,0)$ 内递减，在 $(0,+\infty)$ 内递增.

11. **解** (1) 由 $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$，令 $y'=0$，解得驻点：$x_1=0,x_2=1$.

又由 $y''=12x-6$，有

$$y''(0)=-6<0,\quad y''(1)=6>0,$$

所以函数 $y=2x^3-3x^2$ 在点 $x=0$ 处取得极大值，极大值为 $y(0)=0$；在点 $x=1$ 处取得极小值，极小值为 $y(1)=-1$.

(2) 由于函数 $y=x^2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，并且

$$y'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1),$$

令 $y'=0$，解得驻点：$x=e^{-\frac{1}{2}}$. 又由

$$y''=2\ln x+1+x\left(2\cdot\frac{1}{x}\right)=2\ln x+3,$$

$$y''(e^{-\frac{1}{2}})=2\left(-\frac{1}{2}\right)+3=2>0,$$

所以函数 $y=x^2\ln x$ 在点 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 处有极小值，极小值为

$$y(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}.$$

(3) 由 $y'=1-\cos x$，令 $y'=0$，解得驻点：$x=2n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 但是除了这些点以外，因为 $|\cos x|<1$，有

$$y'=1-\cos x>0,$$

也就是在点 $x=2n\pi$ 处左右附近的值均为正，所以函数 $y=x-\sin x$ 无极值.

(4) 由 $y'=2e^x-e^{-x}=e^{-x}(2e^{2x}-1)$，令 $y'=0$，解得驻点：

$$x=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

又由 $y''=2e^x-(-e^{-x})=2e^x+e^{-x}$，显然有

$$y''\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)>0,$$

所以函数 $y=2e^x+e^{-x}$ 在点 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$ 处取得极小值,极小值为

$$y\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2\sqrt{2}.$$

12. **解** (1) 由

$$\begin{aligned}y'&=3x^2-6x+6=3(x^2-2x+2)\\&=3[(x-1)^2+1]>0,\end{aligned}$$

可见,函数 $y=x^3-3x^2+6x-2$ 在区间 $[-1,1]$ 上递增,所以区间端点 $x=-1$ 与 $x=1$ 分别为最小值点与最大值点.因此函数在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 $y(1)=2$,最小值为 $y(-1)=-12$.

(2) 由

$$y'=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})=xe^{-x}(2-x),$$

令 $y'=0$,解得驻点:$x_1=0,x_2=2$,并且它们都在区间 $[-1,3]$ 内.

因为函数 $y=x^2e^{-x}$ 在区间 $[-1,3]$ 上处处可导,所以只需把这些驻点与区间端点的函数值进行比较:

$$y(0)=0,\quad y(2)=4e^{-2},\quad y(-1)=e,\quad y(3)=9e^{-3}.$$

因此函数 $y=x^2e^{-x}$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值为 $y(-1)=e$,最小值为 $y(0)=0$.

13. **证** 设 $f(x)=(1+x)^n-(1+nx)$,则

$$f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=n[(1+x)^{n-1}-1].$$

由于 $x>0,n-1>0$,故 $(1+x)^{n-1}>1,f'(x)>0$.因此,在 $x\in[0,\infty)$ 时,$f(x)$ 是递增的.由此推出:在 $x>0$ 时,

$$f(0)<f(x).$$

再由 $f(0)=0$,得到

$$f(x)=(1+x)^n-(1+nx)>0,$$

即
$$(1+x)^n>1+nx\quad(x>0,n>1).$$

14. **解** (1) 函数 $y=x^2e^{-x}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.由于

$$y'=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})=xe^{-x}(2-x),$$

$$y''=e^{-x}(2-x)-e^{-x}x(2-x)+xe^{-x}(-1)$$
$$=e^{-x}(x^2-4x+2),$$

令 $y''=0$,解得:$x_1=2-\sqrt{2}$,$x_2=2+\sqrt{2}$,这样我们就可以分成$(-\infty,2-\sqrt{2})$,$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$,$(2+\sqrt{2},+\infty)$三个区间来讨论.当 $x<2-\sqrt{2}$ 时,$y''>0$;当 $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ 时,$y''<0$;当 $x>2+\sqrt{2}$ 时,$y''>0$.

由此得出,函数 $y=x^2e^{-x}$图形在$(-\infty,2-\sqrt{2})$,$(2+\sqrt{2},+\infty)$内是凹弧,在$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$内是凸弧;拐点是$(2-\sqrt{2},y(2-\sqrt{2}))$和$(2+\sqrt{2},y(2+\sqrt{2}))$.

(2) 函数 $y=\ln(x^2+1)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.由于

$$y'=2x(x^2+1)^{-1},$$
$$y''=[2(x^2+1)-2x\cdot 2x](x^2+1)^{-2}$$
$$=-2(x^2-1)(x^2+1)^{-2},$$

令 $y''=0$,解得:$x_1=-1$,$x_2=1$,这样我们就可以分成$(-\infty,-1)$,$(-1,+1)$,$(+1,+\infty)$三个区间来讨论.当 $x<-1$ 时,$y''<0$;当$-1<x<1$ 时,$y''>0$;当 $x>1$ 时,$y''<0$.

由此得出,函数 $y=\ln(x^2+1)$图形在$(-\infty,-1)$,$(1,+\infty)$内是凸弧,在$(-1,1)$内是凹弧;拐点是$(-1,\ln 2)$和$(1,\ln 2)$.

15. **解** (1) 函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$;

(2) 由 $y(-x)=\dfrac{-x}{1+(-x)^2}=\dfrac{-x}{1+x^2}=-y(x)$可知,函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$是个奇函数,它的图形是关于原点对称的,因此只讨论 $x\geqslant 0$ 的部分;

(3) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$ 可知,$y=0$ 是图形的水平渐近线;

(4) 由 $y'=\dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,令 $y'=0$,解得:$x=$

± 1；又由

$$y''=\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{-2x-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(2x^2-3)}{(1+x^2)^3},$$

令 $y''=0$，解得 $x=0,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$；

(5) 列表讨论函数的增减性、凹凸性、极值和拐点.

x	0	(0,1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	0	−	−	−	0	+
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘
$y=f(x)$	拐点	凸	极大值	凸	拐点	凹

(6) 取辅助点$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$，$\left(3,\frac{3}{10}\right)$，并作图(见图 3-1).

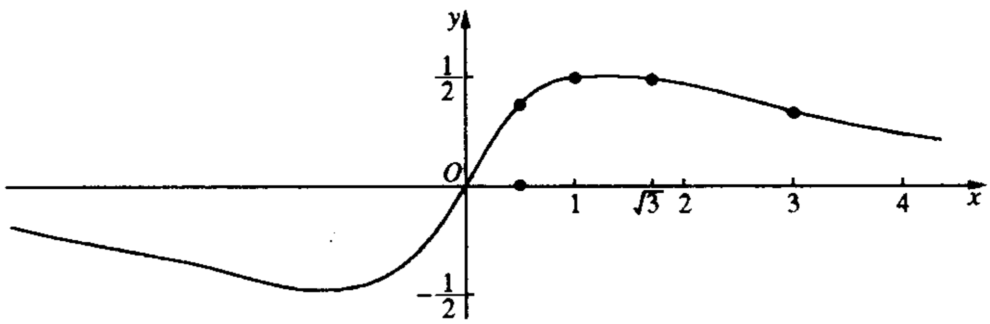


图 3-1

16. **解** (1) 函数 $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$的定义域为 $x\in(-1,+\infty)$；

(2) 由于 $y(x)\neq y(-x)$，可知它是一个非奇非偶函数；

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}=+\infty$，故 $x=-1$ 是一条垂直渐近线；

(4) 一阶导数：$f'(x)=\dfrac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$，

二阶导数：$f''(x)=\dfrac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$.

在 $x=0$ 时，$f'(x)=0$，$f'(x)$在经过 $x=0$ 点时，符号由负到正，故 $f(0)=0$ 是极小值. 由于 $x\in(-1,+\infty)$时，$f''(x)>0$，故在 $x\in(-1,+\infty)$时，$f(x)$是凹的；

(5) 列出表格

区　间	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	↘	0	↗
$f(x)$	凹	极小值	凹

(6) 作图(见图 3-2).

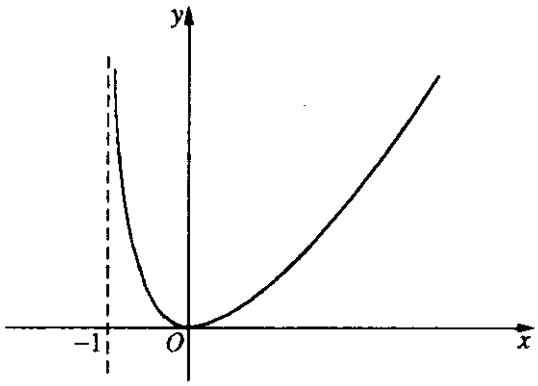


图　3-2

第四章　积　　分

一、内容提要

（一）重要概念及性质

1. 原函数

定义 4.1　设函数 $f(x)$在区间 X 上有定义，如果存在 $F(x)$，使得

$$F'(x)=f(x),\quad 对任意\ x\in X,$$

或者

$$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,\quad 对任意\ x\in X,$$

那么称 $F(x)$是 $f(x)$的一个**原函数**.

如果函数 $f(x)$存在原函数，那么也称 $f(x)$是**可积**的.

2. 不定积分

（1）定义

定义 4.2　设函数 $f(x)$在区间 X 上有定义，称 $f(x)$的全体原函数为$f(x)$的**不定积分**，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x,$$

其中$\int$称为**积分号**，x 称为**积分变量**，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**.

（2）性质

性质 1　设函数 $f(x)$，$g(x)$可积，则

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x,$$

性质 2 设函数 $f(x)$ 可积，k 为不等于零的常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

由性质 1,2 容易得到：设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$ 为可积函数，$a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为不全等于零的常数，则

$$\int \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)\mathrm{d}x.$$

即有限多个函数线性组合的不定积分等于它们不定积分的线性组合，积分的这种性质又称为积分运算的线性性质.

3. 定积分

(1) 定义

定义 4.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 份，分点依次为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

在每一个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 c_i，作乘积

$$f(c_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,2,\cdots,n)$$

及和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

无论区间的分法如何，c_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的取法如何，如果当最大区间的长度

$$\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$$

趋向于零时和数 σ 的极限存在，那么我们就说函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，并称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**，记为

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**，x 称为**积分变量**. $[a,b]$ 称为**积分区间**. a 称为**积分下限**，b 称为**积分上限**，和数 σ 称为**积分和**.

注意 定积分与不定积分是两个完全不同的概念.不定积分是微分的逆运算,而定积分是一种特殊的和的极限;函数 $f(x)$的不定积分是(无穷多个)函数,而 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分是一个完全由被积函数 $f(x)$和积分区间$[a,b]$所确定的值,它与积分变量采用什么符号是无关的.于是我们可以把

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{写成} \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 性质

性质 1 设函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上可积,则

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,k 为一任意常数,则

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由性质 1,2 容易得到:设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$在$[a,b]$上可积,$a_k(k=1,2,\cdots,n)$为任意常数,则

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n a_k f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x.$$

上述性质称为定积分的线性性质.

性质 3 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,c 为$[a,b]$上一个分点,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 4 设函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上可积,且 $f(x) \leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 5 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,且

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \text{对任意 } x \in [a,b],$$

其中 m,M 为常数,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

性质 6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

性质 7 积分中值定理 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则存在 $c\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(c)(b-a).$$

上述公式的几何意义是,当 $f(x)\geqslant0$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b$ 以及 $y=0$ 所围成的曲边梯形的面积;而 $f(c)(b-a)$ 表示以 $[a,b]$ 为底,以 $f(c)$ 为高的矩形的面积.积分中值定理说明,在曲边梯形的所有变化的高度 $f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 之中,至少有一个高度 $f(c)(a\leqslant c\leqslant b)$,使得以 $f(c)$ 为高的同底矩形与此曲边梯形有相同的面积.因此,$f(c)$ 称为**曲边梯形的平均高度**,并称

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**积分平均值**.

4. 变上限的定积分

定义 4.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则对于任意 $x(a\leqslant x\leqslant b)$,$f(x)$ 在 $[a,x]$ 上也可积,称 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 的**变上限的定积分**,记作 $\Phi(x)$,即

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

当函数 $f(x)\geqslant0$ 时,变上限的定积分 $\Phi(x)$ 在几何上表示为右侧邻边可以变动的曲边梯形面积.

5. 广义积分(又称反常积分)

(1) 无穷积分

定义 4.5 设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上有定义,并且对于任意实数 $A(A>a)$,$f(x)$在有界区间$[a,A]$上都是可积的,如果当 $A\to+\infty$时,极限

$$I=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

存在,那么就称此极限值 I 为函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上的**无穷积分**,记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x=I.$$

这时我们说该无穷积分是收敛的,且收敛于 I. 如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

不存在,我们就说该无穷积分是发散的. 这时

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

只是一个符号,而不代表任何数值.

类似地,我们也可以定义函数 $f(x)$在区间$(-\infty,a]$上的无穷积分:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)\mathrm{d}x.$$

对于函数在区间$(-\infty,+\infty)$上的无穷积分定义为:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{A_1\to-\infty}\int_{A_1}^a f(x)\mathrm{d}x+\lim_{A_2\to+\infty}\int_a^{A_2} f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 a 为任意一个实数,并且当等式右边的两个无穷积分都收敛时,才认为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. 注意,积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值不依

赖于 a 的选择；并且 $A_1\to-\infty$ 和 $A_2\to+\infty$ 的速度可以是不同的.

(2) 无界函数的积分

定义 4.6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义，并且对于任意小的正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<b-a)$，$f(x)$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上都是可积的，但在点 $x=b$ 附近无界. 如果当 $\varepsilon\to0$ 时，极限

$$I=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$$

存在，那么就称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**无界函数积分**（这时，称 b 为**反常点或瑕点**），记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x=I.$$

这时我们说该无界函数积分是收敛的，且收敛于 I. 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，我们就说该无界函数积分是发散的. 这时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只是一个记号，而不代表任何数值.

类似地，我们也可以定义函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的无界函数积分（这里 a 为反常点）：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对于函数在区间 $[a,b]$ 上的无界函数积分（这里 a,b 都是反常点，而在 $[a,b]$ 内部无其他反常点）定义为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_{a+\varepsilon_1}^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_c^{b-\varepsilon_2}f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 c 为 (a,b) 内任一实数，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是彼此独立的任意小的正数，并且当等式右边的两个无界函数积分都收敛时，才认为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是

收敛的. 注意，积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值不依赖于 c 的选择.

如果 $f(x)$在$[a,b]$内有一个反常点 $c(a<c<b)$，则可定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时，也只有当等式右边的两个无界函数积分都收敛时，才认为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. 注意，这里的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 趋于零也是彼此独立的，因此一般说来 $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$.

类似地，我们还可以定义在$[a,b]$内有多个反常点的情况的无界函数积分. 需要指出的是，广义积分的记号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与定积分在形式上一样，但是含意是不同的. 因此，在计算一个积分时，要先判断一下函数在$[a,b]$上有没有反常点，否则就容易出错.

6. 函数 $y=f(x)$"可积"的充分、必要条件以及可求积的概念

(1) 有关的分类情况

- $y=f(x)$
  - 可积
    - 可求积
      - 已掌握的积分法(如换元法、分部积分法等)
      - 目前尚未掌握的积分法
    - 不可求积
  - 不可积

(2) "不可求积"的概念

求不定积分与求导数有很大不同，我们知道任何初等函数的导数仍为初等函数，而许多初等函数的不定积分，例如

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x,$$
$$\int\sin x^2\mathrm{d}x,\quad \int\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x$$

等，虽然它们的被积函数的表达式都很简单，但在初等函数的范围内却积不出来.这不是因为积分方法不够，而是由于被积函数的原函数不是初等函数的缘故.我们称这种函数是“**不可求积**”的.究竟什么样的函数积分可以积出来，我们不再做详细的讨论.

(3) 函数的“可积性”问题

因为定积分是一个特殊的和的极限，所以函数的可积性问题就是这种特殊极限（它既不是序列极限，也不是一般的函数极限）的存在性的问题.对这个问题的系统讨论超出了我们的教学大纲.下面只给出其中几个常用的结论.

① 可积的必要条件

若函数 $f(x)$在$[a,b]$上是可积的，则 $f(x)$在$[a,b]$上必定是有界的.

由上面的定理可知，无界函数是不可积的，今后，在我们的课程中讨论函数的可积性时，总是先假定函数是有界的，但还必须看到，有界函数不一定都是可积的.

例如，狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

是有界的，但在任意的区间$[a,b]$上都是不可积的.

在区间$[a,b]$上给定一个函数 $f(x)$，问在什么条件下它是可积的呢？这里我们不加证明地给出函数可积的充分条件.

② 可积的充分条件

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有定义，若 $f(x)$满足下述的条件之一：

(1) $f(x)$在$[a,b]$上是连续的；

(2) $f(x)$在$[a,b]$上只有有限个间断点，且有界；

(3) $f(x)$在$[a,b]$上是单调、有界的，

则 $f(x)$在$[a,b]$上是可积的.

顺便指出，上面我们所提到的“可积”也称为黎曼(Riemann)可积. 这是因为上述意义下的可积在历史上是由黎曼给出的，因此定积分也称**黎曼积分**.

(二) 重要定理及公式

定理 4.1 若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $F(x)+C$(C 为任意常数)仍是 $f(x)$的原函数，而且 $f(x)$的任何原函数都可以表成 $F(x)+C$ 的形式.

由上述定理可知，如果 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，那么

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad (C\text{ 为任意常数}),$$

就是 $f(x)$的全体原函数.

基本积分表

根据不定积分的定义和基本初等函数的微分公式，即可写出对应的不定积分公式. 我们把这些公式列成下面的基本积分表(其中的 C 与 C_1 均为任意常数)：

1. $\int 0\mathrm{d}x=C$;

2. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$;

3. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$;　　4. $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;

5. $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;　　6. $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$;

7. $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$;　　8. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$;

9. $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C \quad (a>0,a\neq1)$;

10. $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C=-\mathrm{arccot}\,x+C_1$;

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1$.

注意 在公式 3 中，当 $x>0$ 时，公式显然成立；当 $x<0$ 时，有

$$(\ln|x| + C)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x},$$

所以对一切的 $x \neq 0$ 都有

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

由公式 2,3 还可以看出幂函数 x^α 的不定积分是

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1, \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1. \end{cases}$$

由此可见,幂函数(除 x^{-1}外)的原函数都是幂函数.

定理 4.2(第一换元法) 若 u 为自变量时,有

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C,$$

则 u 为 x 的可微函数 $u=\varphi(x)$时,也有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C.$$

定理 4.3(第二换元法) 设函数 $x=\psi(t)$在开区间上的导数不为零,若

$$\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C,$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G[\psi^{-1}(x)] + C,$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$为 $x=\psi(t)$的反函数.

定理常可以写成下面的变换形式

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\psi(t)} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C$$

$$\xlongequal{t=\psi^{-1}(x)} G[\psi^{-1}(x)] + C.$$

可见第二换元法是先作代换 $x=\psi(t)$,然后再求积分,因此第二换元法又称为**作代换法**.

注意 当被积函数中含有二次根式 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$时，通常我们分别作这样三个变换：$x=a\sin t$；$x=a\tan t$，$x=a\sec t$ 来去掉根号．但这并不是去掉根号的惟一方法，例如在 $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 中，作变换 $a^2-x^2=u^2$ 会更简便些．

定理 4.4(分部积分法) 设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$可导，若

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

存在，则

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

上面的积分公式也可简记为

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u,$$

称之为**分部积分公式**．这个公式告诉我们，如果积分$\int u\mathrm{d}v$ 计算起来有困难，而积分$\int v\mathrm{d}u$ 比较容易计算时，那么可以利用公式把前者计算转化为后者的计算．这就是说，按照公式将所求积分分成两部分，一部分已不用再积分，只要对另一部分求积，这也是“分部积分法”名称的来源．

定理 4.5(连续函数的原函数存在定理) 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

在$[a,b]$上可导，并且

$$\Phi'(x) = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

即 $\Phi(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数．

这个定理告诉我们，任何连续的函数都有原函数存在，并且这个原函数正是 $f(x)$的变上限的定积分，即

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right] = f(x).$$

定理 4.6(微积分学基本定理)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

这个公式称为微积分基本公式,它常常写成下面的形式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

微积分学基本公式告诉我们,要求已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分,只要先求出函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任意一个原函数 $F(x)$,然后再计算它由 a 点到 b 点的改变量 $F(b)-F(a)$ 即可,由于这个公式是由牛顿和莱布尼茨发现的,因此,也称为牛顿-莱布尼茨公式.

定理 4.7(定积分的换元积分法)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.作变换 $x=x(t)$,它满足:

(1) 当 $t=\alpha$ 时,$x=x(\alpha)=a$,当 $t=\beta$ 时,$x=x(\beta)=b$;

(2) 当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时,$x=x(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化;

(3) $x'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,

则有换元积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)\mathrm{d}t.$$

定理说明,在我们利用换元法计算定积分时,只要随着积分变量的替换相应地改变定积分的上、下限,这样在求出原函数之后,就可以直接代入积分限计算原函数的改变量之值,而不必换回原来的变量.这就是定积分换元法与不定积分换元法的不同之处.

定理 4.8(定积分的分部积分法)　设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数 $u'(x)$ 与 $v'(x)$,则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}[v(x)] = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}[u(x)].$$

定积分的分部积分公式与不定积分的分部积分公式区别是，这个公式的每一项都带有积分限.

（三）重要方法及应用

1. 不定积分的几何意义

当 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数时，$f(x)$ 的不定积分为 $F(x)+C$（C 为任意常数）. 这样一来，对于 C 的一个确定的值 C_0，就对应有 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)+C_0$. 在直角坐标系 Oxy 中，称由 $F(x)+C_0$ 所确定的一条曲线为 $f(x)$ 的一条积分曲线. 因为 C 可以取一切实数值，所以积分曲线有无穷多条. 由上面的定理可知，把 $f(x)$ 的一条积分曲线沿 y 轴方向平行移动一定的距离，就可以得到它的另一条积分曲线，而且 $f(x)$ 的一切积分曲线都可以用这样的方法得到. 我们称所有的这些积分曲线的全体为 $f(x)$ 的**积分曲线族**，因此，不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示函数 $f(x)$ 的积分曲线族 $y=F(x)+C$. 这族曲线的特点是，它在横坐标相同的点处，所有的切线都是彼此平行的.

例 1 设一曲线通过点(3，4)，并且在曲线上的每一点处切线的斜率都为 $5x$，求此曲线方程.

解 设此曲线方程为

$$y - f(x) = 0,$$

则有

$$y' = f'(x) = 5x,$$

两边积分，得到

$$y = \frac{5}{2}x^2 + C.$$

由于该曲线通过(3，4)点，有

$$4 = \frac{5}{2}\times 3^2 + C,$$

因此 $C=-\frac{37}{2}$. 所以该曲线方程为

$$y=\frac{5}{2}x^2-\frac{37}{2}.$$

2. 定积分的几何意义

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成的几个曲边梯形的面积的代数和(即在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的面积取负号).

例如

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0.$$

这是因为函数 $y=\sin x$ 当 $x\in[0,\pi]$时，曲线在 x 轴上方，而当 $x\in[-\pi,0]$时，曲线在 x 轴下方，而面积是相同的缘故.

3. 定积分的应用

(1) 平面图形的面积

设在区间$[a,b]$上，连线曲线 $y=f(x)$位于 $y=g(x)$的上方，求由这两条曲线以及直线 $x=a,x=b$ 所围成的平面图形的面积 S.

由微元法，在$[a,b]$上任取一个小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，于是在$[x,x+\mathrm{d}x]$上的平面图形面积 ΔS 可以用面积微元 $\mathrm{d}S$ 来作近似代替. $\mathrm{d}S$ 为小矩形的面积，即

$$\mathrm{d}S=[f(x)-g(x)]\cdot\mathrm{d}x.$$

将 $\mathrm{d}S$ 从 a 到 b 求定积分，就得到平面图形的面积 S

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x. \tag{1}$$

例 2 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x,y=\mathrm{e}^{-x}$以及直线 $x=1$ 所围成的平面图形(见图 4-1)的面积 S.

解 由于对任意的 $x\in[0,1]$有 $\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}^{-x}$，故由(1)式

$$S=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}]\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2.$$

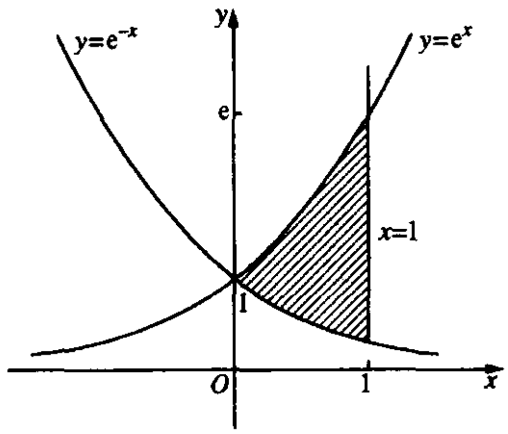


图 4-1

(2) 旋转体的体积

所谓旋转体是指由一个平面图形绕一条直线旋转而成的立体，这条直线叫做旋转轴.

设在区间$[a,b]$上，连续曲线 $y=f(x)$在 x 轴上方，求由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积 V.

由微元法，由$[a,b]$上任取一个小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，于是在$[x,x+\mathrm{d}x]$上的旋转体体积 ΔV 可以用体积微元 $\mathrm{d}V$ 来作近似代替. $\mathrm{d}V$ 为小矩形绕 x 轴旋转所成的正圆柱体的体积，即

$$\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2 \cdot \mathrm{d}x.$$

将 $\mathrm{d}V$ 从 a 到 b 求定积分，就得到旋转体的体积 V：

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x = \pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x. \tag{2}$$

例 3 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部分与 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转形成的椭球体的体积.

解 椭圆上半部的方程是 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. 根据旋转体体积公式(2)和图形的对称性，有

$$V = 2\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

$$= 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

(3) 质杆的质量

设质杆所在直线为 x 轴，质杆放置的区间为$[a,b]$，并且其线密度 $\mu=\mu(x)(a\leqslant x\leqslant b)$为一连续函数. 求此质杆的质量 M.

由微元法，在$[a,b]$上任取一个小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，其上质杆的质量为 ΔM. 在$[x,x+\mathrm{d}x]$中，我们可以近似地认为质杆是均匀的，将 x 点的线密度近似代替小区间上每一点的线密度，于是就得到了 ΔM 的一个近似值 $\mu(x)\mathrm{d}x$，即质杆的质量微元为

$$\mathrm{d}M = \mu(x)\mathrm{d}x.$$

将 $\mathrm{d}M$ 从 a 到 b 求定积分，就得到非均匀质杆的质量为

$$M = \int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

例 4 有一个放置在 x 轴上的质杆，若其上每一点的密度等于该点的横坐标的平方，试求横坐标在 2 与 3 之间的那段质杆的质量.

解 由题意可知质杆的密度为 $\mu(x)=x^2$. 根据公式(3)，质杆的质量为

$$M = \int_2^3 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 6\,\frac{1}{3}.$$

二、习题

(一) 选择题

1. 若 $f(x)$是 $g(x)$的一个原函数，则正确的是(　　).

(A) $\int f(x)=\mathrm{d}x=g(x)+C$；　　(B) $\int g(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$；

(C) $\int g'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$;　　(D) $\int f'(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$.

2. 若 $\ln|x|$ 是函数 $f(x)$ 的原函数，那么 $f(x)$ 的另一个原函数是(　　).

(A) $\ln|ax|$;　　(B) $\frac{1}{a}\ln|ax|$;

(C) $\ln|x+a|$;　　(D) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

3. 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$(　　).

(A) $\sin x+C$;　　(B) $\cos x+C$;

(C) $-\sin x+C$;　　(D) $-\cos x+C$.

4. 下列函数中，哪一个是函数 $2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x})$ 的原函数(　　).

(A) $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$;　　(B) $4(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$;

(C) $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$;　　(D) $(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2$.

5. 设 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上定义的连续奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，则由 $y=f(x)$，$x=-a$，$x=a$ 及 x 轴围成的图形面积 $S=$(　　)为不正确.

(A) $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;　　(B) $\int_{-a}^a |f(x)|\mathrm{d}x$;

(C) $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$;　　(D) $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

6. 设 $f'(x)$ 存在且连续，则 $\left(\int \mathrm{d}f(x)\right)'=$(　　).

(A) $f(x)$;　　(B) $f'(x)$;

(C) $f'(x)+C$;　　(D) $f(x)+C$.

7. $\int \cos(1-2x)\mathrm{d}x=$(　　).

(A) $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$;　　(B) $\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$;

(C) $-\sin(1-2x)+C$;　　(D) $2\sin(1-2x)+C$.

8. 已知 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{3-4x}$，则 $I=$(　　).

(A) $-\frac{1}{4}\ln|3-4x|$;　　(B) $\ln|3-4x|+C$;

(C) $\frac{1}{4}\ln(3-4x)+C$;　　(D) $-\frac{1}{4}\ln|3-4x|+C$.

9. 若$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$,则$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=($　　$)$.

(A) $2(1-x^2)^2+C$;　　(B) $-2(1-x^2)^2+C$;

(C) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$;　　(D) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$.

10. $\int x\mathrm{d}e^{-x}=($　　$)$.

(A) $xe^{-x}+C$;　　(B) $-xe^{-x}+C$;

(C) $xe^{-x}+e^{-x}+C$;　　(D) $xe^{-x}-e^{-x}+C$.

11. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则 $\int e^{-x}f(e^{-x})\mathrm{d}x=($　　$)$.

(A) $F(e^x)+C$;　　(B) $-F(e^{-x})+C$;

(C) $F(e^{-x})+C$;　　(D) $\frac{F(e^{-x})}{x}+C$.

12. 设 $f(x)$有原函数 $x\ln x$,则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=($　　$)$.

(A) $x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln x\right)+C$;　　(B) $x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)+C$;

(C) $x^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x\right)+C$;　　(D) $x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln x\right)+C$.

13. $\int\ln\frac{x}{2}\mathrm{d}x=($　　$)$.

(A) $x\ln\frac{x}{2}-2x+C$;　　(B) $x\ln\frac{x}{2}-4x+C$;

(C) $x\ln\frac{x}{2}-x+C$;　　(D) $x\ln\frac{x}{2}+x+C$.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=($　　$)$.

(A) $2\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x$;　　(B) $2\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$;

(C) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 x\mathrm{d}x$； (D) $\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 x^2\mathrm{d}x$.

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=($ $)$.

(A) 0； (B) π； (C) $\frac{\pi}{2}$； (D) 2.

16. $\int_0^3|x-1|\mathrm{d}x=($ $)$.

(A) 0； (B) 1； (C) $\frac{5}{2}$； (D) 2.

17. $\int_a^x f'(2t)\mathrm{d}t=($ $)$.

(A) $2[f(x)-f(a)]$； (B) $f(2x)-f(2a)$；

(C) $2[f(2x)-f(2a)]$； (D) $\frac{1}{2}[f(2x)-f(2a)]$.

18. 设 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)\mathrm{d}t$，则 $y'(0)=($ $)$.

(A) -2； (B) -1； (C) 1； (D) 2.

19. 若 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x^4}{2}$，则 $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=($ $)$.

(A) 16； (B) 8； (C) 4； (D) 2.

20. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=($ $)$.

(A) $\frac{\sin x}{x}$； (B) $\frac{\cos x}{x}$； (C) $\frac{\sin b}{b}$； (D) $\frac{\sin t}{t}$.

21. 已知 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t=($ $)$.

(A) $F(x)-F(a)$； (B) $F(t)-F(a)$；

(C) $F(x+a)-F(2a)$； (D) $F(t+a)-F(2a)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=($ $)$.

(A) 1； (B) 0； (C) $\frac{1}{2}$； (D) $\frac{1}{3}$.

23. 广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=($　　$)$.

(A) 0；　　(B) $+\infty$；　　(D) $-\frac{1}{2}$；　　(D) $\frac{1}{2}$.

24. 已知 $y'=2x$，且 $x=1$ 时 $y=2$，则 $y=($　　$)$.

(A) x^2+2；　　(B) x^2+1；　　(C) $\frac{x^2}{2}+2$；　　(D) $x+1$.

（二）解答题

1. 试验证函数 $y=1+\arctan x$ 与 $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 是同一个函数的原函数.

2. 一曲线过点(0,1)处，并且在曲线上每一点的切线的斜率为 $2x$，求此曲线方程.

3. 求下列各不定积分：

(1) $\int x^4dx$；　　(2) $\int x\sqrt{x}dx$；

(3) $\int\left(\frac{1}{x}+4^x\right)dx$；　　(4) $\int\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx$；

(5) $\int\tan^2xdx$；　　(6) $\int\frac{2x^2+3}{x^2+1}dx$；

(7) $\int\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}dx$；　　(8) $\int(1+\cos^3x)\sec^2xdx$.

4. 利用换元法求下列各不定积分：

(1) $\int\sqrt{2+3x}dx$；　　(2) $\int\frac{4}{(1-2x)^2}dx$；

(3) $\int x\sqrt{x^2+3}dx$；　　(4) $\int\sin3xdx$；

(5) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$；　　(6) $\int\frac{dx}{1+9x^2}$；

(7) $\int\cos^2xdx$；　　(8) $\int\frac{e^x}{2-3e^x}dx$；

(9) $\int e^x(e^x+2)^5dx$；　　(10) $\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx$；

(11) $\int\frac{1}{x^2-16}dx$； (12) $\int 10^{2x}dx$；

(13) $\int\sin 3x\cdot\sin 5x dx$； (14) $\int\cos^3 x dx$；

(15) $\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx$； (16) $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$；

(17) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$.

5. 利用分部积分法求下列各不定积分：

(1) $\int x\sin 2x dx$； (2) $\int x\ln x dx$；

(3) $\int x e^{-x}dx$； (4) $\int\ln^2 x dx$；

(5) $\int\arccos x dx$； (6) $\int x\arctan x dx$；

(7) $\int(x^2+2x+1)e^x dx$； (8) $\int(\arcsin x)^2 dx$.

6. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$； (2) $\int\frac{1}{1+\cos x}dx$；

(3) $\int\sin^4 x dx$； (4) $\int\tan^6 x\sec^4 x dx$；

(5) $\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$； (6) $\int\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(1+x^2)^3}}$；

(7) $\int e^{|x|}dx$； (8) $\int\cos^3 x dx$；

(9) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$； (10) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$；

(11) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$； (12) $\int\frac{x^4}{(1-x^2)^3}dx$.

7. 已知$\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，求$\int\frac{1}{f(x)}dx$.

8. 若$\frac{\sin x}{x}$是函数 $f(x)$的一个原函数，求$\int x^3 f'(x)dx$.

9. 已知 $y'=2x$，求曲线 $y=f(x)$通过点$(2,5)$的方程.

10. 已知 $y'=2xe^{x^2}+\frac{1}{x}+6x(x^2-1)^2$，求 $y=f(x)$ 通过点 $(1,e-2)$ 的曲线方程.

11. 已知 $y=\int_0^x \sin t\,dt$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

12. 已知 $y=\int_4^x \sqrt{1+t^2}\,dt$，求 dy.

13. 已知 $y=\int_1^{x^2} \frac{1}{1+t}dt$，求 $\frac{dy}{dx}$.

14. 已知 $y=\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$，求 $\frac{dy}{dx}$.

15. 已知 $\Phi(x)=\int_0^{x^2} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}dt$，求 $\Phi'(x)$.

16. 求下列定积分：

(1) $\int_1^3 x^3 dx$；　　(2) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$；

(3) $\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx$；　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{4t^2-9}dt$；

(5) $\int_{-1}^0 e^{-x}dx$；　　(6) $\int_{-1}^{-2} \frac{x}{x+3}dx$.

17. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (-1\leqslant x<1), \\ e^{-x} & (1\leqslant x\leqslant 2). \end{cases}$ 求 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx$.

18. 利用定积分的性质，比较积分值的大小：

(1) $\int_0^1 x^2 dx$ 和 $\int_0^1 x^3 dx$；

(2) $\int_1^2 x^3 dx$ 和 $\int_1^2 x^2 dx$；

(3) $\int_1^2 \ln x\,dx$ 和 $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$；

(4) 设 $f(x)=\begin{cases} x & (-1\leqslant x<0), \\ x^2 & (0\leqslant x\leqslant 1), \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} x^2 & (-1\leqslant x<0), \\ x & (0\leqslant x\leqslant 1), \end{cases}$

$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x$.

19. 求函数 $y=2x^2+3x+3$ 在区间$[1,4]$上的平均值.

20. 证明$\frac{1}{40}<\int_{10}^{20}\frac{x^2}{x^4+x+1}\mathrm{d}x<\frac{1}{20}$.

21. 计算下面各定积分:

(1) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$;　　(4) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;　　(6) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(7) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^{\mathrm{e}-1}\ln(x+1)\mathrm{d}x$;　　(10) $\int_0^{\pi} x^3\sin x\mathrm{d}x$.

22. 证明:若 $f(x)$在$[-a,a]$上可积并为偶函数,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

23. 证明:若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是以 T 为周期的周期函数,则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

24. 求由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的平面图形的面积.

25. 求由曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x^2}$ 以及直线 $y=0,x=0,x=1$ 所围成的平面图形的面积.

26. 求由下面各曲线所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=x^2$ 和 $x=y^2$;　　(2) $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$和 $y=0$.

27. 在半径为 1 m 的半球形水池中灌满了水.若把池中的水完全吸尽,需作多少功?

28. 有一放置在 y 轴上的质杆，若其上每一点的密度等于 e^y，试求质杆在 $1\leqslant y\leqslant 2$ 的一段上的质量.

29. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$.

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$.

31. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$.

32. 求下列各无穷积分的值：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{(1-2x)^{3/2}}$；　　(4) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}$，$n>1$；

(5) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$；　　(6) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$.

33. 设 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1$，证明

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

其中 σ,μ 均为常数，且 $\sigma>0$.

三、分析及解答

（一）选择题

1. 答案是：B.

分析　由原函数与不定积分的定义，可知

$$(f(x)+C)'=f'(x)=g(x).$$

故选择 B.

2. 答案是：A.

分析　因为函数 $f(x)$ 的所有原函数只相差一个常数，故知 $\ln|ax|$ 为所求.

故选择(A).

3. 答案是：B.

分析 由于$(\sin x)'=f(x)$，所以$f(x)=\cos x$. 因此

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=\cos x+C.$$

故选择 B.

4. 答案是：D.

分析 由原函数的定义，有

$$\begin{aligned}[(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2]'&=2(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})'\\&=2(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\\&=2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}).\end{aligned}$$

故选择 D.

5. 答案是：D.

分析 因为$f(x)$为奇函数，$x>0$时，$f(x)>0$，$x<0$时，$f(x)<0$. 所以当$-a\leqslant x\leqslant 0$时，所求图形(见图 4-2)的面积应为$-\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$. (D)的写法不正确.

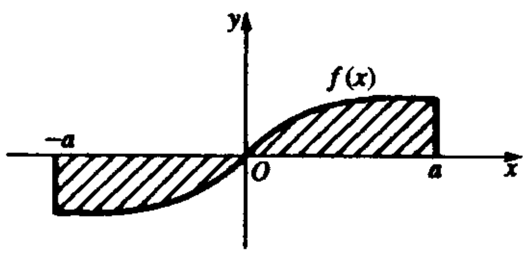


图 4-2

故选择 D.

6. 答案是：B.

分析 由不定积分的性质，有

$$\left(\int \mathrm{d}f(x)\right)'=(f(x)+C)'=f'(x).$$

故选择 B.

7. 答案是 A.

分析 $\int\cos(1-2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\cos(1-2x)\mathrm{d}(1-2x)$

$$=-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C.$$

故选择 A.

8. 答案是：D.

分析 由公式

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

可知

$$\int\frac{1}{3-4x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\ln|3-4x|+C.$$

故选择 D.

9. 答案是：D.

分析 由于

$$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2),$$

又由于

$$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C,$$

因此

$$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(1-x)^2+C.$$

故选择 D.

10. 答案是：C.

分析 $\int x\mathrm{d}e^{-x}=xe^{-x}-\int e^{-x}\mathrm{d}x=xe^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}(-x)$

$$=xe^{-x}+e^{-x}+C.$$

故选择 C.

11. 答案是：B.

分析 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=-\int f(e^{-x})d(e^{-x})=-F(e^{-x})+C.$

故选择 B.

12. 答案是 B.

分析 由已知 $f(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$，故

$$\int xf(x)dx=\int x(\ln x+1)dx=\int x\ln xdx+\int xdx$$
$$=x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)+C.$$

故选择 B.

13. 答案是：C.

分析 $\int \ln\frac{x}{2}dx=x\ln\frac{x}{2}-\int xd\ln\frac{x}{2}$

$$=x\ln\frac{x}{2}-\int x\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}dx=x\ln\frac{x}{2}-x+C.$$

故选择 C.

14. 答案是：C.

分析 由于 $f(x)$是一个分段函数，所以

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{1}x^2dx.$$

故选择 C.

15. 答案是：D.

分析 由于

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ -\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$$

我们有：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = 2(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

故选择 D.

16. 答案是：C.

分析 由于

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1-x, & 0 \leqslant x < 1, \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-1| \mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^3 (x-1)\mathrm{d}x \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

故选择 C.

17. 答案是：D.

分析 $\displaystyle\int_0^x f'(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x f'(2t)\mathrm{d}(2t) = \frac{1}{2}f(2t)\Big|_a^x$

$$= \frac{1}{2}[f(2x) - f(2a)]$$

故选择 D.

18. 答案是：D.

分析 由于

$$y' = (x-1)(x-2),$$

所以

$$y'(0) = (-1)(-2) = 2.$$

故选择 D.

19. 答案是：A.

分析 由变上限定积分函数求导定理得 $f(x)=\left(\frac{x^4}{2}\right)'=2x^3$，代入后得

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot 2(\sqrt{x})^3\mathrm{d}x=\int_0^4 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^4=16.$$

故选择 A.

20. 答案是：A.

分析 由变上限定积分函数求导定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\sin x}{x}.$$

故选择 A.

21. 答案是：C.

分析 令 $t+a=u$，当 $t=x$ 时，$u=x+a$；当 $t=a$ 时，$u=2a$. 故

$$\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t=\int_{2a}^{x+a} f(u)\mathrm{d}u=F(x+a)-F(2a).$$

故选择 C.

22. 答案是：D.

分析 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

故选择 D.

23. 答案是：D.

分析

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_2^{+\infty}=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

故选择 D.

24. 答案是：B.

分析 由于 $y'=2x$，所以

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C.$$

又由于当 $x=1$ 时，$y=2$，代入上式，得到 $C=1$. 因此

$$y=x^2+1.$$

故选择 B.

（二）解答题

1. **证明** 因为

$$(1+\arctan x)'=(1)'+(\arctan x)'=0+\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-x(\sqrt{1+x^2})'}{1+x^2}}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}=\frac{1}{1+x^2},$$

即

$$(1+\arctan x)'=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'.$$

这说明 $y=1+\arctan x$ 与 $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 是同一个函数的原函数.

2. **解** 设所求的曲线为 $y=F(x)$，由题意可知

$$F'(x) = f(x) = 2x.$$

根据不定积分定义得

$$y = \int f(x)\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C.$$

由于曲线过点(0,1)，有 $F(0)=0^2+C=1$，即 $C=1$.

故所求的曲线的方程为 $y=x^2+1$.

3. **解** (1) $\int x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C.$

(2) $$\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$$

(3) $$\int\left(\frac{1}{x}+4^x\right)\mathrm{d}x=\int x^{-1}\mathrm{d}x+\int 4^x\mathrm{d}x=\ln|x|+\frac{4^x}{\ln 4}+C$$

$$=\ln|x|+4^x(\ln 4)^{-1}+C.$$

(4) $$\int\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x-\sqrt{2})^2}{x-\sqrt{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int(x-\sqrt{2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+C.$$

(5) $$\int\tan^2x\mathrm{d}x=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2x-\int\mathrm{d}x$$

$$=\tan x-x+C.$$

(6) $$\int\frac{2x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(2+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\int 2\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=2x+\arctan x+C.$$

(7) $$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\int\cos x\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C.$$

(8) $$\int(1+\cos^3x)\sec^2x\mathrm{d}x=\int\sec^2x\mathrm{d}x+\int\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\tan x+\sin x+C.$$

4. 利用换元法求下列各不定积分：

解 (1) $\int\sqrt{2+3x}\mathrm{d}x=\int\sqrt{2+3x}\frac{1}{3}\mathrm{d}(2+3x)$

$$=\frac{1}{3}\int(2+3x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2+3x)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{2}{3}(2+3x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{9}(2+3x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2) $\int\frac{4}{(1-2x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{4}{(1-2x)^2}\mathrm{d}(1-2x)$

$$=-2\int(1-2x)^{-2}\mathrm{d}(1-2x)$$

$$=-2\cdot(-1)(1-2x)^{-1}+C$$

$$=\frac{2}{1-2x}+C.$$

(3) $\int x\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}(x^2+3)$

$$=\frac{1}{2}\int(x^2+3)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2+3)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(4) $\int\sin 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\sin 3x\mathrm{d}3x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C.$

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(5x)}{\sqrt{1-(5x)^2}}=\frac{1}{5}\arcsin 5x+C.$

(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3x)}{1+(3x)^2}=\frac{1}{3}\arctan 3x+C.$

(7) $\int\cos^2x\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\mathrm{d}x+\int\cos 2x\mathrm{d}x\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}2x\right]$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

(8) $\int\frac{e^x}{2-3e^x}dx=\int\frac{1}{2-3e^x}de^x=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{2-3e^x}d(2-3e^x)$

$$=-\frac{1}{3}\ln|2-3e^x|+C.$$

(9) $\int e^x(e^x+2)^5dx=\int(e^x+2)^5d(e^x+2)$

$$=\frac{1}{6}(e^x+2)^6+C.$$

(10) $\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

(11) $\int\frac{1}{x^2-16}dx=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}\right)dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\int\frac{1}{x-4}dx-\int\frac{1}{x+4}dx\right]$$

$$=\frac{1}{8}(\ln|x-4|-\ln|x+4|)+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C.$$

(12) $\int 10^{2x}dx=\frac{1}{2}\int 10^{2x}d2x=\frac{1}{2}\cdot\frac{10^{2x}}{\ln 10}+C$

$$=\frac{10^{2x}}{\ln 100}+C.$$

(13) $\int\sin 3x\cdot\sin 5x dx=\int-\frac{1}{2}(\cos 8x-\cos 2x)dx$

$$=-\frac{1}{2}\int(\cos 8x-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{16}\int\cos 8x\mathrm{d}8x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}2x$$

$$=-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 8x\right)+C.$$

(14) $\int\cos^3x\mathrm{d}x=\int\cos^2x\cos x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2x)\mathrm{d}\sin x$

$$=\int\mathrm{d}\sin x-\int\sin^2x\mathrm{d}\sin x$$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C.$$

(15) $\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x\right)$$

$$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}x+C.$$

(16) 令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2t\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+1}=\sec x$.

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2t\mathrm{d}t}{\tan t\cdot\sec t}=\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+C.$$

(17) 令 $x=a\sec t$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$.

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{a\tan t}{a\sec t}a\sec t\cdot\tan t\cdot\mathrm{d}t$$

$$=a\int\tan^2t\mathrm{d}t=a\int(\sec^2t-1)\mathrm{d}t$$

$$= a\tan t - at + C$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a\,\mathrm{arcsec}\,\frac{x}{a} + C.$$

5. **解** (1) $\int x\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\sin 2x\mathrm{d}2x = -\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\cos 2x$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}2x$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

(2) $\int x\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\ln x$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

(3) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$= -x\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(-x)$$

$$= -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C$$

$$= -(x+1)\mathrm{e}^{-x} + C.$$

(4) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - \int x\mathrm{d}\ln^2 x = x\ln^2 x - \int x\cdot 2(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x\mathrm{d}\ln x$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int \mathrm{d}x$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

$$= x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C.$$

(5) $\int \arccos x\mathrm{d}x = x\arccos x - \int x\mathrm{d}\arccos x$

$$= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}2\sqrt{1-x^2} + C$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

(6) $\int x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\arctan x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - x + \arctan x) + C.$$

(7) $\int (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int (x^2+2x+1)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$= (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(x^2+2x+1)$$

$$= (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x(2x+2)\mathrm{d}x$$

$$= (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x - 2\int (x+1)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$= (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x - 2(x+1)\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(x+1)$$

$$= (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x - 2(x+1)\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x - 2(x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C$$

$$= (x^2+1)\mathrm{e}^x + C.$$

(8) $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=x(\arcsin x)^2-\int x\mathrm{d}(\arcsin x)^2$

$$=x(\arcsin x)^2-2\int x(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^2+\int\arcsin x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\mathrm{d}\,\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\,\sqrt{1-x^2}\arcsin x$$
$$-2\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\arcsin x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\,\sqrt{1-x^2}\arcsin x$$
$$-2\int\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\,\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

6. **解** (1) 设 $u=x+2, x=u-2$.

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x=\int\frac{u-2}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\int\frac{u-2}{u^{1/2}}\mathrm{d}u$$

$$=\int(u^{1/2}-2u^{-1/2})\mathrm{d}u=\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}-2\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}-4(x+2)^{1/2}+C.$$

(2) **方法一** 由于

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x),$$

故

$$\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$\int\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x-\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x}=-\cot x+\frac{1}{\sin x}+C$$

$$=\frac{1-\cos x}{\sin x}+C=\tan\frac{x}{2}+C.$$

方法二 $\int\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}\frac{x}{2}$

$$=\tan\frac{x}{2}+C.$$

(3) $\int\sin^4x\mathrm{d}x=\int(\sin^2x)^2\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C.$$

(4) 设 $u=\tan x$, $\mathrm{d}u=\sec^2x\mathrm{d}x$，利用 $\sec^2x=1+\tan^2x$.

$$\int\tan^6x\sec^4x\mathrm{d}x=\int\tan^6x\sec^2x\sec^2x\mathrm{d}x$$

$$=\int\tan^6x(1+\tan^2x)\sec^2x\mathrm{d}x$$

$$=\int u^6(1+u^2)\mathrm{d}u=\int(u^6+u^8)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}+C=\frac{1}{7}\tan^7x+\frac{1}{9}\tan^9x+C.$$

(5) 设 $1+\mathrm{e}^x=u$, $x=\ln(u-1)$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}=\int\frac{1}{\sqrt{u}\,(u-1)}\mathrm{d}u=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{u}}{u-1}$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{u}-1}-\frac{1}{\sqrt{u}+1}\right)\mathrm{d}\sqrt{u}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}+C=\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C.$$

(6) 设 $u=\sqrt{1+x^2}$，$u^2=1+x^2$，$2x\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$，$x\mathrm{d}x=u\mathrm{d}u$.

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int\frac{u\mathrm{d}u}{u+u^3}=\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$=\arctan u+C=\arctan\sqrt{1+x^2}+C.$$

(7) 由于

$$\mathrm{e}^{|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0.\end{cases}$$

故
$$\int\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C_1, & x\geqslant 0,\\ \int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C_2, & x<0.\end{cases}$$

又由于

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\quad F'(x)=f(x),$$

故 $F(x)+C$ 在 $x=0$ 连续，故

$$\lim_{x\to0^+}(\mathrm{e}^x+C_1)=\lim_{x\to0^-}(-\mathrm{e}^{-x}+C_2),$$

即
$$C_1+1=C_2-1,\quad C_2=C_1+2.$$

因而

$$\int\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}\mathrm{e}^x+C_1, & x\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^{-x}+C_1+2, & x<0.\end{cases}$$

(8) 设 $u=\sin x$，$\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x$.

$$\int\cos^3x\mathrm{d}x=\int\cos^2x\cos x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int(1-u^2)\mathrm{d}u=u-\frac{1}{3}u^3+C$$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C.$$

分析 对于一般情况：

$$\int\sin^mx\cos^nx\mathrm{d}x,$$

其中 $m\geqslant 0, n\geqslant 0, m, n$ 有一个是奇数，设 $n=2k+1$，则有

$$\int \sin^m x\cos^{2k+1}x\mathrm{d}x = \int \sin^m x(\cos^2 x)^k\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\cos x\mathrm{d}x.$$

再应用换元法：$u=\sin x$ 即可.

对于 $m=2k+1$，则有

$$\int \sin^{2k+1}x\cos^n x\mathrm{d}x = \int (\sin^2 x)^k\cos^n x\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin x\mathrm{d}x.$$

再应用换元法：$u=\cos x$ 即可.

(9) 应用第二换元法：设

$$x = 2\tan\theta, \quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},$$

则 $$\mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\tan^2\theta+1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int\frac{2\sec^2\theta\mathrm{d}\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

由于

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

设 $u=\sin\theta$，我们有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right)+C = -\frac{1}{4\sin\theta}+C = -\frac{\csc\theta}{4}+C.$$

由直角三角形的解法，$\csc\theta=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$（见图 4-3）. 因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C.$$

注意　有时对这种类型的题目，应用第一换元法比较简便．例如：

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x.$$

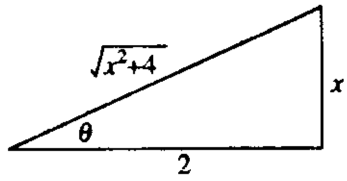


图　4-3

此题虽然可以用上面的第二换元法来做，但用第一换元法，就比较简便．

设 $u=x^2+4$，$\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$，故

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}+C$$

$$=\sqrt{x^2+4}+C.$$

(10) **方法一**　设 $u=\sqrt{x}$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=2\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4-u^2}}=2\arcsin\frac{u}{2}+C$$

$$=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$$

方法二　利用积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

故 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

(11) 设 $u=x$，$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=-\cot x$，$\mathrm{d}v=\dfrac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x$，

$$\int \frac{x}{\sin^2x}\mathrm{d}x=-x\cot x+\int \cot x\mathrm{d}x$$

$$=-x\cot x+\ln|\sin x|+C.$$

(12) $$\int \frac{x^4}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x=\int \frac{x^3}{4}\mathrm{d}\left[\frac{1}{(1-x^2)^2}\right]$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int \frac{3x^2}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{3}{8}\frac{x}{1-x^2}+\frac{3}{8}\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{3}{8}\frac{x}{(1-x^2)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

7. **解** 对 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$ 两边求导，得

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},$$

故 $$\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$$

8. **解** 因为 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，故

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

因此 $$\int x^3f'(x)\mathrm{d}x=x^3f(x)-3\int x^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=x^3f(x)-3\int x^2\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^3f(x)-3\left[x^2\frac{\sin x}{x}-2\int\sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

9. **解** 由 $y'=2x$，我们有

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C,$$

又由曲线通过点(2,5)，故

$$5=2^2+C,\quad C=1.$$

故所求的曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

10. **解** 先通过 y' 求出 y

$$y=\int\left(2xe^{x^2}+\frac{1}{x}+6x(x^2-1)^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int 2x e^{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx + 6\int x(x^2-1)^2 dx$$

$$= e^{x^2} + \ln|x| + 6 \cdot \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^2 dx$$

$$= e^{x^2} + \ln|x| + 3 \cdot \frac{(x^2-1)^3}{3} + C$$

$$= e^{x^2} + \ln|x| + (x^2-1)^3 + C.$$

由已知条件 $y=f(x)$经过点$(1,e-2)$，由此确定 C，即

$$e-2 = e + \ln|1| + (1^2-1)^3 + C,$$

$$e-2 = e + C, \quad C = -2.$$

故所求的方程为

$$y = e^{x^2} + \ln|x| + (x^2-1)^3 - 2.$$

11. **解** 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x \sin t dt = \sin x,$$

所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12. **解** 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_4^x \sqrt{1+t^2} dt = \sqrt{1+x^2},$$

所以

$$dy = \sqrt{1+x^2} dx.$$

13. **解** 令 $u=x^2$，有

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\int_1^u \frac{1}{1+t} dt = \frac{1}{1+u},$$

根据复合函数求导法则，得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u} \cdot u'_x$$

$$=\frac{2x}{1+x^2}.$$

14. **解** 令 $u=x^2$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^u\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

根据复合函数求导法则，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x'$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

15. **解** $\Phi'(x)=\dfrac{\sin^2x^2}{1+\cos^2x^2}(x^2)'=\dfrac{2x\sin^2x^2}{1+\cos^2x^2}.$

16. **解** (1) $\int_1^3x^3\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}\Big|_1^3=\dfrac{81}{4}-\dfrac{1}{4}=20.$

(2) $\int_1^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\dfrac{2}{3}(8-1)=4\dfrac{2}{3}.$

(3) $\int_\pi^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_\pi^{2\pi}=-(1+1)=-2.$

(4) $$\int_0^1\frac{1}{4t^2-9}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2t-3}-\frac{1}{2t+3}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2t-3}{2t+3}\right|\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\ln\frac{1}{5}=-\frac{1}{12}\ln5.$$

(5) $\int_{-1}^0\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^0=-1+\mathrm{e}=\mathrm{e}-1.$

(6) $$\int_{-1}^{-2}\frac{x}{x+3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-2}\left(1-\frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x=x-3\ln|x+3|\Big|_{-1}^{-2}$$

$$=(-2+1)-3\ln|-2+3|+3\ln|-1+3|$$

$$=3\ln2-1.$$

17. **解** $$\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1x^2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+(-e^{-x})\Big|_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}-e^{-\frac{3}{2}}+e^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}+e^{-1}-e^{-\frac{3}{2}}.$$

18. **答** (1) 由于在区间$[0,1]$内，$x^2-x^3=x^2(1-x)\geqslant 0$，即

$$x^2\geqslant x^3.$$

根据定积分的不等式性质，有

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 x^3\mathrm{d}x.$$

(2) 由于在区间$[1,2]$内，$x^3-x^2=x^2(x-1)\geqslant 0$，即

$$x^3\geqslant x^2.$$

根据定积分的不等式性质，有

$$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x\geqslant\int_1^2 x^2\mathrm{d}x.$$

(3) 由于在区间$[1,2]$内，$\ln x-\ln^2 x=\ln x(1-\ln x)>0$，即

$$\ln x>\ln^2 x.$$

根据定积分的不等式性质，有

$$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x>\int_1^2 \ln^2 x\mathrm{d}x.$$

(4) 由于在区间$[-1,0)$内，$x-x^2=x(1-x)\leqslant 0$，即

$$x\leqslant x^2;$$

而在区间$[0,1]$内，$x^2-x=x(x-1)\leqslant 0$，即

$$x^2\leqslant x.$$

因此在区间$[-1,1]$内，有

$$f(x)\geqslant g(x).$$

根据定积分的不等式性质，得到

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

19. **解**　设函数 $y=2x^2+3x+3$ 在区间$[1,4]$上的平均值为 $\overline{y}$，根据积分学中值定理，有

$$\overline{y}=\frac{1}{4-1}\int_1^4(2x^2+3x+3)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right)\Big|_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\left(42+\frac{45}{2}+9\right)=24.5.$$

20. **证明**　由于在区间$[10,20]$内 $0<x+1<x^4$，于是有

$$x^4<x^4+x+1<2x^4,$$

考虑到 $x^2>0$，得到

$$\frac{1}{x^2}=\frac{x^2}{x^4}>\frac{x^2}{x^4+x+1}>\frac{x^2}{2x^4}=\frac{1}{2x^2}.$$

根据定积分的不等式性质以及

$$\int_{10}^{20}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-x^{-1}\Big|_{10}^{20}=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20},$$

有

$$\frac{1}{2}\int_{10}^{20}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x<\int_{10}^{20}\frac{x^2}{x^4+x+1}\mathrm{d}x<\int_{10}^{20}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{1}{40}<\int_{10}^{20}\frac{x^2}{x^4+x+1}\mathrm{d}x<\frac{1}{20}.$$

21. **解**　(1) 令 $x=\sin t$，则 $t=\arcsin x$，$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$.

又当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}.$$

(2) 令 $u=\ln x$，则当 $x=1$ 时，$u=0$；当 $x=\mathrm{e}$ 时，$u=1$. 于是

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}(1+\ln x)\mathrm{d}\ln x=\int_0^1(1+u)\mathrm{d}u$$

$$=\left(u+\frac{1}{2}u^2\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

(3) 令 $u=\mathrm{e}^{-x}$，则当 $x=0$ 时，$u=1$；当 $x=1$ 时，$u=\mathrm{e}^{-1}$. 于是

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}=-\int_1^{\mathrm{e}^{-1}}\frac{\mathrm{d}u}{u+1}$$

$$=-\ln|u+1|\Big|_1^{\mathrm{e}^{-1}}=\ln 2-\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

$$=\ln 2+\ln\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$$

(4) 令 $x=2\sin t$，则 $t=\arcsin\frac{x}{2}$，$\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

又当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{6}$. 于是

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(5) 令 $u=x+1$，则当 $x=-2$ 时，$u=-1$；当 $x=0$ 时，$u=1$. 于是

$$\int_{-2}^0\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int_{-2}^0\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)$$

$$=\int_{-1}^1\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u=\arctan u\Big|_{-1}^1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(6) $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x de^x = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$$= e - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

(7) $\int_1^e x\ln x dx = \int_1^e \ln x d\frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} d\ln x = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

(8) $\int_0^1 x\arctan x dx = \int_0^1 \arctan x d\frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x}{2}\arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} d\arctan x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arctan x \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

(9) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = x\ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} x d\ln(x+1)$

$$= e - 1 - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx$$

$$= e - 1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= e - 1 - \int_0^{e-1} dx + \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx$$

$$= e - 1 - (e-1) + \ln(x+1) \Big|_0^{e-1}$$

$$=\ln(e-1+1)=1.$$

(10) $\int_0^\pi x^3\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^\pi x^3\mathrm{d}\cos x=-x^3\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x^3$

$$=\pi^3+\int_0^\pi 3x^2\cos x\mathrm{d}x=\pi^3+3\int_0^\pi x^2\mathrm{d}\sin x$$

$$=\pi^3+3x^2\sin x\Big|_0^\pi-3\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x^2$$

$$=\pi^3+0-6\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x=\pi^3+6\int_0^\pi x\mathrm{d}\cos x$$

$$=\pi^3+6x\cos x\Big|_0^\pi-6\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\pi^3-6\pi-6\sin x\Big|_0^\pi=\pi^3-6\pi-0$$

$$=\pi(\pi^2-6).$$

22. **证明** 根据定积分对于区间的可加性，有

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $x=-t$，计算上式右端的第一项，得到

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}(-t)=-\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t.$$

考虑到 $f(x)$ 是偶函数，并且定积分与积分变量选取无关，我们有

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

23. **证明** 根据定积分对于区间的可加性，有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $x+T=u$，计算上式右端的第三项，考虑到当 $x=T$ 时，$u=0$；当 $x=a+T$ 时，$u=a$. 并且由于 $f(x)$ 是一个以 T 为周期的周期函数，有 $f(x-T)=f(x)$，便得到

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(u-T)\mathrm{d}(u-T) = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

24. **解** 设此平面图形（见图 4-4）的面积为 S，则

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

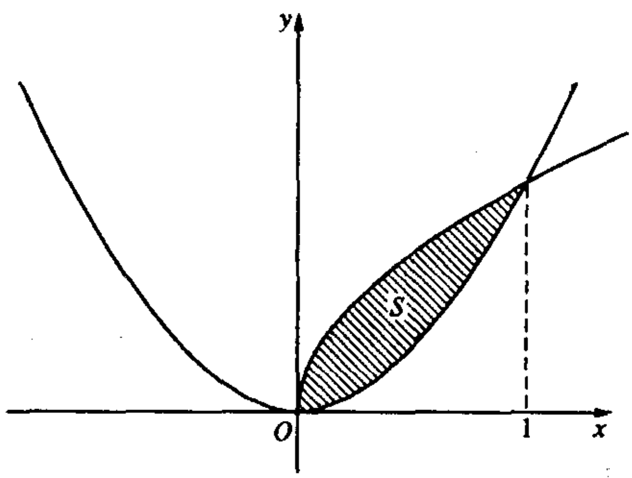


图 4-4

25. **解** 设此平面图形（见图 4-5）的面积为 S，则

$$S = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^0)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

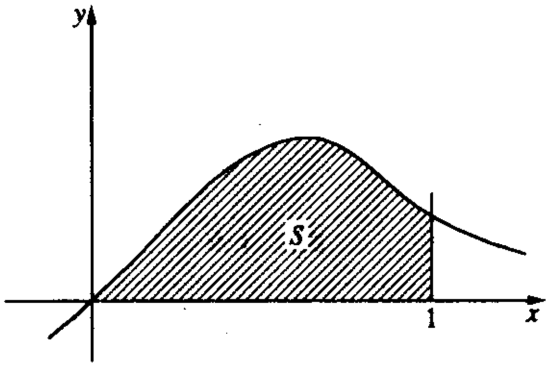


图 4-5

26. **解** (1) 设所求旋转体为 V_1，它是由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的平面图形(见图 4-4)绕 x 轴旋转所产生的. 这时在区间 $[0,1]$ 内曲线 $x=y^2$(写成 $y_1=\sqrt{x}$)在 $y=x^2$(写成 $y_2=x^2$)的上方，因此

$$V_1 = \pi\int_0^1 y_1^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^1 y_2^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x\mathrm{d}x - \pi\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x$$

$$= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3}{10}\pi.$$

(2) 设所求旋转体为 V_2，它是由曲线 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 $y=0$ 所围成的平面图形(见图 4-6)绕 x 轴旋转所产生的. 这时在区间 $[0,\pi]$ 内曲线 $y=\sin x$(写成 $y_1=\sin x$)在 $y=0$(写成 $y_2=0$)的上方，因此

$$V_2 = \pi\int_0^\pi y_1^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^\pi y_2^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\pi}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2}.$$

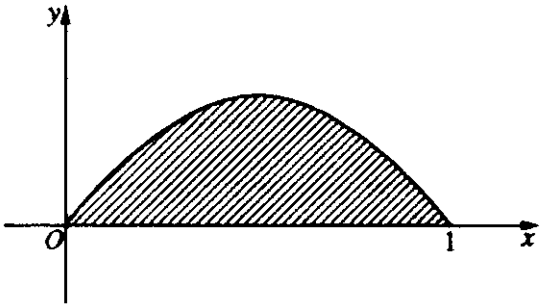


图 4-6

27. 解 选取坐标系如图(见图 4-7)所示. 考虑在小区间 $[x, x+\Delta x]$上的一薄层水的质量为

$$\Delta m = \rho\Delta v \doteq \rho\pi(1^2 - x^2)\Delta x,$$

其中 ρ 是水的密度, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

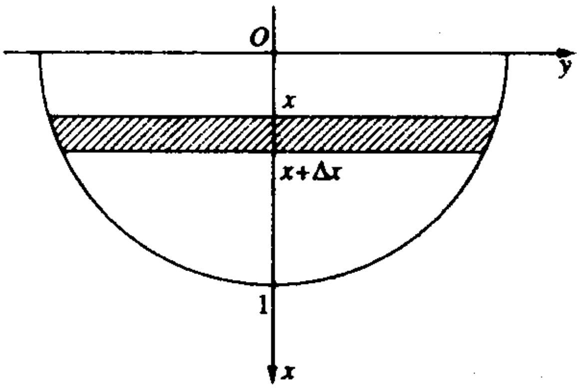


图 4-7

而把这一层水提出地面需作的功为

$$\Delta W = \Delta mg \cdot x = g\rho\pi x(1 - x^2)\Delta x,$$

其中 g 是重力加速度, 这里取 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, 即

$$\mathrm{d}W = g\rho\pi x(1 - x^2)\mathrm{d}x.$$

所以把这半球形水池的水完全吸尽时, 这时将 $\mathrm{d}W$ 从 0 到 1 求定积分, 需作的总功为

$$W = \int_0^1 g\rho\pi x(1 - x^2)\mathrm{d}x = g\rho\pi\int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x$$

$$= g\rho\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}g\rho\pi$$

$$= 2450\pi\text{J}.$$

28. **解** 根据题意可知质杆的密度为 $\mu(y)=e^y$. 考虑区间 $[1,2]$ 中任意一个小区间 $[y,y+\Delta y]$ 上质杆的质量为

$$\Delta m = \mu(y)\Delta y,$$

即

$$\mathrm{d}m = \mu(y)\mathrm{d}y.$$

所以将 $\mathrm{d}m$ 从 1 到 2 求定积分，便得到质杆在 $1\leqslant y\leqslant 2$ 的一段上的质量

$$m=\int_1^2\mu(y)\mathrm{d}y=\int_1^2 e^y\mathrm{d}y$$

$$=e^y\Big|_1^2=e(e-1).$$

29. **解** $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_{1+\varepsilon}^2$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}(1+\varepsilon-1)^{2/3}\right]=\frac{3}{2}.$$

30. **解** $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}=\lim_{b\to1^-}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$

$$=-\lim_{b\to1^-}2\sqrt{1-x}\Big|_0^b$$

$$=-\lim_{b\to1^-}2(\sqrt{1-b}-1)=2.$$

31. **解** $\displaystyle\int_{-1}^2\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

由于第二积分 $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\infty$，故原积分发散.

32. **解** (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x.$$

因为

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\lim_{A\to-\infty}(-\arctan A)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2};$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\arctan B=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

(2) 由于

$$\int_{\mathrm{e}}^{B}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{B}\frac{1}{\ln^2x}\mathrm{d}\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{\mathrm{e}}^{B}$$

$$=1-\frac{1}{\ln B},$$

因此

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x=\lim_{B\to+\infty}\int_{\mathrm{e}}^{B}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\ln B}\right)=1.$$

(3) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(1-2x)^{3/2}}=\lim\limits_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}\frac{dx}{(1-2x)^{3/2}}$

$$=\lim_{b\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right]_{b}^{0}=\lim_{b\to-\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-2b}}\right)=1.$$

(4) 设 $t=\sqrt{x^2-1}+x$,则

$$x=\frac{t^2+1}{2t},\quad dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt,$$

故 $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t^n}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}(t^{-n}-t^{-n-2})dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}-\frac{t^{-n-1}}{-n-1}\right]_{1}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n^2-1}.$$

(5) 分三种情况讨论:

① $p=1$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{1}^{+\infty}=\infty,\text{发散};$$

② $p>1$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}[x^{-p+1}]_{1}^{b}=\frac{1}{p-1},\text{收敛};$$

③ $p<1$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty.$$

(6) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}=\int_{2}^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right]dx$

$$=\left[-\frac{1}{x}-\ln x+\ln(x+1)\right]_{2}^{+\infty}$$

$$=\left[-\frac{1}{x}+\ln\frac{x+1}{x}\right]_{2}^{+\infty}=\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}.$$

33. **证明** 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

令 $x=-t$,计算上式右端的第一项,得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx&=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-t)^2}{2}}d(-t)\\&=-\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\&=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

由题设

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1,$$

便得到

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}.$$

另一方面,令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=u$,则

$$\begin{aligned}\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx&=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}d\,\frac{x-\mu}{\sigma}\\&=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du.\end{aligned}$$

由上面的讨论得到

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}.$$

第五章　多元函数微积分

一、内容提要

（一）重要概念及性质

1. 平面点集

所谓平面点集是指平面上满足某个条件 S 的一切点构成的集合.

2. 邻域

设 $P_0\in\mathbf{R}^2,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，我们把满足不等式

$$|P-P_0|<\delta$$

的一切点 P 的全体称为 P_0 点的 δ **邻域**，记作 $N_\delta(P_0)$，其中 δ 为**邻域半径**，即

$$N_\delta(P_0)=\{P\,|\,|P-P_0|<\delta\}.$$

可见平面上 P_0 点的 δ 邻域是以 P_0 点为中心半径为 δ 的不包括圆周在内的圆的内部. 与实数集类似，我们分别用 $N_\delta(\overline{P}_0)$，$N(P_0)$以及 $N(\overline{P}_0)$分别表示 P_0 点的 δ **空心邻域**，不指明邻域半径的邻域及空心邻域.

3. 内点

设 E 为一平面点集，点 $P_0\in E$. 如果存在着 $\delta>0$，使得$N_\delta(P_0)\subset E$，那么我们称 P_0 是 E 的**内点**.

4. 开集

如果 E 的每一个点都是它的内点，那么我们称 E 是**开集**.

5. 边界

设 $P_1 \in \mathbf{R}^2$，如果 P_1 的任何邻域中既含有 E 的点，也含有不属于 E 的点，那么我们称 P_1 是 E 的**边界点**. E 的全部边界点构成的集合，叫做 E 的**边界**（E 的边界用 ∂E 表示，读作"偏 E"）. 一个平面点集的边界点可能属于这个集，也可能不属于这个集.

6. 开区域与闭区域

设 D 是一个开集. 如果 D 中的任意两点都可以用一条位于 D 内的折线（由有限个相衔接线段组成）连接，那么我们称 D 为一**开区域**，开区域也称为**区域**. 这种可以用位于 D 内折线把 D 中任意两点连接起来的性质称为连通性，因此区域是只含有内点的连通集. 一个区域 D 和它的边界 ∂D 构成的集合称为**闭区域**，记为 $\overline{D}$. 显然

$$\overline{D} = D \cup \partial D.$$

由上述定义可知，$E_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 是一个区域，而 $E_2 = \{(x,y) \mid |x-1| \leqslant 2, |y-1| \leqslant 2\}$ 是一个闭区域. 通常我们把点集 $\mathbf{R}^2$ 也称为全平面，因为全平面没有边界点，所以我们说它包含了全部边界点，也可以说它不包含边界点. 因此全平面既是闭区域又是开区域.

为了叙述方便，我们把开区域和闭区域统称为平面区域（以后也简称为区域仍用 D 表示）.

7. 二元函数

定义 5.1 设 D 是平面上的一个点集，f 是一个确定的对应关系. 如果对于 D 中的每一个点 (x,y)，通过 f 都有实数集 $\mathbf{R}$ 内的惟一确定的一个实数 z 与之对应，那么这个对应关系 f 就叫做由 D 到 $\mathbf{R}$ 内的**二元函数**，记为

$$f: D \to \mathbf{R};$$

而 z 叫做 f 在点 (x,y) 处的**函数值**，记作 $z=f(x,y)$；D 叫做函数 f 的**定义域**；所有的函数值的集合 Z，即

$$Z = \{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$$

叫做 f 的**值域**,我们也可以称二元函数 f 是从 D 到 Z 上的**映射**.

通常说,$z=f(x,y)$是 x,y 的二元函数,x 与 y 是自变量,z 是因变量.

8. 二元函数的极限

定义 5.2 设函数 $z=f(x,y)$在 $N(\overline{P}_0)$上有定义,对于任意的 $P\in N(\overline{P}_0)$. 如果点 $P(x,y)$与定点 $P_0(x_0,y_0)$之间的距离

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

趋向于 0 时,$f(x,y)$趋向于一个常数 A,那么我们就称 A 为 **P 趋于 P_0 时(或在 P_0 处)函数 $f(x,y)$的极限**,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad 或 \quad f(x,y) \to A \quad (\rho \to 0).$$

注意 在我们讨论二元函数极限时,总是指点 P 以任意的方式趋向于点 P_0(通常称这种极限为全面极限). 由此可见,如果点 P 沿着两个不同的路径趋向于点 P_0 时,$f(x,y)$分别趋向于两个不同的常数,那么我们就可以说,当 P 趋向于 P_0 时,函数 $f(x,y)$的极限不存在,因为它不满足定义中的要求.

9. 二元函数的连续性

定义 5.3 设函数 $z=f(x,y)$在 $N(P_0)$上有定义,如果当 $P(x,y)$趋向于 $P_0(x_0,y_0)$时,函数 $f(x,y)$以 $f(x_0,y_0)$为极限,即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$在点 P_0 处是**连续**的.

与一元函数类似,如果函数 $z=f(x,y)$在平面区域 D 内的每一个点上都连续,那么我们就说函数 $f(x,y)$在 D 内是连续的. 一般来说,区域上连续函数的图形是一张连续的曲面.

10. 偏导数

定义 5.4 设函数 $z=f(x,y)$在 $N(P_0)$上有定义,固定 $y=y_0$,得到 x 的一元函数

$$z=f(x,y_0),$$

如果这个一元函数在 $x=x_0$ 点导数存在，那么我们就称一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 x_0 点的导数为二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点对 x 的**偏导数**（或**偏微商**），记作

$$f'_x(x_0,y_0),\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\ \text{或}\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

同样可以定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记作

$$f'_y(x_0,y_0),\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\ \text{或}\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内每一点 (x,y) 处 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 都存在，那么我们就说它在区域 D 内偏导数存在，并说它在区域 D 内是可导的. 与一元函数类似，$f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在区域 D 内仍是 x,y 的二元函数，我们称它们为偏导函数，简称为偏导数，记为

$$f'_x(x,y)\ \text{或}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad f'_y(x,y)\ \text{或}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y};$$

也可简记为

$$f'_x\ \text{或}\frac{\partial f}{\partial x},\ \text{以及}\ f'_y\ \text{或}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

11. 高阶偏导数

前面已经指出，二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 f'_x 和 f'_y 仍是 x,y 的二元函数，因此我们还可以继续讨论它们关于 x 和 y 的偏导数. 我们把 f'_x 和 f'_y 的偏导数叫做 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 显然二元函数的二阶偏导数共有四个，分别记作：

$$\frac{\partial}{\partial x}(f'_x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\xlongequal{\text{def}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\text{简记为}\ f''_{xx}\ \text{或}\ z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f'_x)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\xlongequal{\text{def}}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\text{简记为}\ f''_{xy}\ \text{或}\ z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \xlongequal{\text{def}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$，简记为 f''_{yx} 或 z''_{yx}；

$$\frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \xlongequal{\text{def}} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$，简记为 f''_{yy} 或 z''_{yy}，

其中 f''_{xy} 和 f''_{yx} 称为 $f(x,y)$ 的二阶混合偏导数，因为它们包含着对不同自变量的偏导数.

同样，我们还可以定义更高阶的偏导数，例如

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \xlongequal{\text{def}} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \xlongequal{\text{def}} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

等等.

如果二元函数 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数在区域 D 上连续，则它们必然相等. 通常我们所遇到的都是初等函数，它们的各阶偏导数都是连续的，因此它们的混合偏导数总是相等的.

12. 全微分

定义 5.5 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $N(P_0)$ 上有定义，给 x_0 一个改变量 Δx，y_0 一个改变量 Δy，使得 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in N(P_0)$，函数 $f(x,y)$ 相应地有改变量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

如果存在着这样的常数 A 和 B，使得

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$$

$$(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \rho \neq 0, \rho \to 0),$$

那么就称 $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

并称函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处是可微的.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点处都可微，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，其全微分记作 $\mathrm{d}f(x,y)$ 或 $\mathrm{d}z$.

13. 通常极值

定义 5.6 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $N(P_0)$ 上有定义，若对于任意的 $P(x,y)\in N(\overline{P}_0)$ 都有

$$f(x_0,y_0)>f(x,y)\quad (f(x_0,y_0)<f(x,y)),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极大(小)值，并称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为极值点.

14. 条件极值

一般来说，给自变量一些约束条件，使得自变量不能在定义域上自由地变化，而只能在定义域的某一个范围内变化，我们把这种极值问题称为**条件极值**.

注意 为了简便起见，我们仅讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值. 这里我们假定函数 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 在所考虑的范围内都有连续的偏导数.

15. 二重积分

(1) 定义

定义 5.7 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义. 将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上都任取一点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$$

当所有小区域 $\Delta\sigma_i$ 的最大直径 $\|\Delta\sigma\|\to 0$ 时，若上述和式的极限

$$\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

存在，并且此极限与区域的分法及 $\Delta\sigma_i$ 中的点 (x_i,y_i) 的取法无关，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D 叫做**积分区域**，$f(x,y)$ 叫做**被积函数**，$\mathrm{d}\sigma$ 叫**面积元素**. 并

称函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上可积.

简单地说,二重积分是一种特殊的和的极限,即

$$\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

(2) 性质

设二元函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在闭区域 D 上都是可积的,根据二重积分定义容易证明它们具有以下的性质:

性质 1 常数因子可以从积分号里面提出来,即

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad (k\text{ 为常数});$$

性质 2 函数的代数和的积分等于函数积分的代数和,即

$$\iint_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

性质 3 二重积分对于区域 D 具有可加性,即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D_1\cup D_2=D, D_1\cap D_2=\varnothing$;

性质 4 若在 D 上, $f(x,y)\equiv 1$, 用 S_D 表示 D 的面积,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=S_D,$$

这就是说,二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$ 在数值上等于区域 D 的面积. 从几何上看,高度为 1 的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积;

性质 5 若在 D 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

特别地,由于

$$-|f(x,y)|\leqslant f(x,y)\leqslant|f(x,y)|,$$

故有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma;$$

性质 6 若在 D 上 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，用 S_D 表示 D 的面积，则

$$m \cdot S_D \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M \cdot S_D;$$

性质 7 积分中值定理 若函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，用 S_D 表示 D 的面积，则在 D 上至少有一点 (x_0,y_0)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(x_0,y_0) \cdot S_D.$$

积分中值定理的几何意义是：对于任意的曲顶柱体，当它的立坐标连续变化时，曲顶柱体的体积等于以某一立坐标为高的同底平顶柱体的体积.

通常我们称 $f(x_0,y_0)$ 为二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的平均值.

（二）重要定理及公式

定理 5.1（最大最小值定理） 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上一定能取得最大值和最小值.

定理 5.2（中间值定理） 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且它取到两个不同的函数值，则它一定能取到这两个函数值之间的一切值.

推论（零点存在定理） 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且它取到的两个不同函数值中，一个大于零，另一个小于零，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使 $f(\xi,\eta)=0$.

定理 5.3（有界性定理） 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它必在 D 上有界.

定理 5.4（可微的必要条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则函数在该点处的两个偏导数存在，并且

$$A = f'_x(x_0,y_0), \quad B = f'_y(x_0,y_0).$$

定理 5.5(可微的充分条件) 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点及它的某一个邻域内存在，并且在该点连续，则函数在该点可微.

定理 5.6(链锁法则) 设函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可导，且在对应于 (x,y) 的点 (u,v) 处，函数 $z=f(u,v)$ 可微，则复合函数 $f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处也可导，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

特别地，若 $z=f(u,v)$，而 $u=u(x),v=v(x)$，则复合函数

$$z=f[u(x),v(x)]$$

是 x 的一元函数. 这时，我们称 z 对 x 的导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

为二元函数 $f(u,v)$ 对 x 的**全导数**(或**全微商**).

定理 5.7(隐函数存在定理) 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续的偏导数，且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\quad F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能惟一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足方程 $F(x,y,z)=0$ 及条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，其偏导数可由

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad 和 \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

亦即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

来确定.

特别，对由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数也有完全类似的结

论，隐函数的导数也可由如下关系式求出：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

定理 5.8(可微函数取得极值的必要条件) 设可微函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，则在该点处函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数都为 0，即

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

同一元函数类似，我们把同时满足 $f'_x(x,y)=0$，和 $f'_y(x,y)=0$ 的点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的**驻点**(也称为**稳定点**). 定理告诉我们可微函数的极值点必是驻点，但驻点不一定是极值点.

定理 5.9(可微函数取得极值的充分条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 在定义域内有一驻点 (x_0,y_0)，且函数在该点有二阶连续偏导数. 记 $f''_{xx}(x_0,y_0)=A, f''_{xy}(x_0,y_0)=B, f''_{yy}(x_0,y_0)=C$.

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时，函数在点 (x_0,y_0) 处达到极值；并且当 $A>0$ 时，取得极小值；当 $A<0$ 时，取得极大值.

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，函数在点 (x_0,y_0) 处不取得极值.

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，情况是不定的，即可能函数在点 (x_0,y_0) 处取得极值，也可能不取得极值.

(三) 重要方法

1. 一阶全微分形式的不变性

给定二元函数 $z=f(u,v)$，当 u,v 为自变量时，函数的全微分式为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

而当 u,v 是 x,y 的函数

$$\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

时，复合后得到 x,y 的二元函数

$$z = f[u(x,y), v(x,y)],$$

它的全微分是

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

由链锁法则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

把它们代入 dz 的表达式中，合并同类项得到

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

不难看出，上式中的$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ 与$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$ 正是函数 $u=u(x,y)$与 $v=v(x,y)$的全微分. 因此有

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

根据上面的讨论，我们可以看出，不论 u,v 是自变量还是中间变量，它们的全微分都具有相同的形式，我们称这个性质为**一阶全微分形式的不变性**.

我们知道，当 u,v 是自变量时，有

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = vdu + udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

由一阶全微分形式的不变性可知，当 u,v 为中间变量时，上式仍然成立. 此外，当 f 仅为 u 的一元函数时，即

$$z = f(u), \quad u = u(x,y).$$

可以得到

$$dz = d(f[u(x,y)] = f'_u(u[(x,y)])du$$

这样连同上面的微分四则运算法则，就可以通过微分来求偏导数（或全导数）.

例 1 设 $z=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$dz=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx.$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

例 2 设 $u=f(xy,yz,zx)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 因为

$$\begin{aligned}du&=d(f(xy,yz,zx))\\&=f_1'd(xy)+f_2'd(yz)+f_3'd(zx)\\&=f_1'(ydx+xdy)+f_2'(zdy+ydz)+f_3'(xdz+zdx)\\&=(yf_1'+zf_3')dx+(xf_1'+zf_2')dy+(yf_2'+xf_3')dz,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yf_1'+zf_3',\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xf_1'+zf_2',\quad \frac{\partial u}{\partial z}=yf_2'+xf_3'.$$

2. 拉格朗日乘数法

拉格朗日乘数法 求 n 元函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

在 m 个约束条件

$$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\quad(i=1,2,\cdots,m;m\leqslant n)$$

下可能的极值点.

一般可分成三步来完成：

(1) 作辅助函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$为待定常数；

(2) 将 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$分别对 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$求偏导数，并令其为 0，再加上 m 个条件方程，便得到一个 $m+n$ 元的方程组

$$\begin{cases}f'_{x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i(\varphi_i)'_{x_j}=0, & j=1,2,\cdots,n,\\ \varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, & i=1,2,\cdots,m;\end{cases}$$

(3) 从上面的方程中解出 $m+n$ 个未知数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m;x_1,x_2,\cdots,x_n$. 从而得到可能极值点的坐标：

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

为了简便起见，我们仅讨论二元函数 $z=f(x,y)$在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值. 这里我们假定函数 $f(x,y)$与 $\varphi(x,y)$在所考虑的范围内都有连续的偏导数.

例 3 求函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$在 $y-\dfrac{1}{2}=0$ 之下的极值.

解 设 $F(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\lambda\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$，有

$$F'_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad F'_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-\lambda.$$

令 $F'_x=0,F'_y=0$ 得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=0,\\ \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-\lambda=0,\\ y-\dfrac{1}{2}=0.\end{cases}$$

解得

$$x = 0,\quad y = \frac{1}{2},\quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

可知$\left(0,\frac{1}{2}\right)$是极大值点，极大值为$\sqrt{3}/2$.

注意 上面的方程组是二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件. 至于求得的驻点是否为极值点需要作进一步的讨论. 但在实际问题中，我们可以根据问题本身的实际意义作出判断.

3. 最小二乘法

在科学技术和经济分析中，我们常常需要根据两个变量的 n 组实验数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，求出这两个变量之间的函数关系的近似表达式 $\hat{y}=b_0+b_1x$（通常称之为**经验公式或回归方程**）. 最小二乘法就是用来求经验公式的一种最常见方法.

假设两个变量 x,y 之间存在着线性关系：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x,$$

其中 β_0,β_1 是给定常数.

用 Q 表示所有误差（$\varepsilon_i=y_i-\beta_0-\beta_1x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$）平方之和，考虑到在 (x_i,y_i) 已知的条件下，Q 是 β_0,β_1 的一个二元函数，故可将 Q 记为 $Q(\beta_0,\beta_1)$. 于是

$$Q(\beta_0,\beta_1) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2,$$

它刻画了全部数据 (x_i,y_i) 与直线 $y=\beta_0+\beta_1x$ 总的偏离程度，$Q(\beta_0,\beta_1)$ 越小就表示直线与数据拟合越好. 自然，我们希望找到与数据拟合得最好的直线，也就是说，由估计 b_0,b_1 所确定的回归方程能使一切 y_i 与 $\hat{y}_i$ 之间偏差达到最小. 换言之，我们希望找到 b_0，b_1 使得对于任意的 β_0,β_1 都有

$$Q(b_0,b_1) \leqslant Q(\beta_0,\beta_1).$$

由于 Q 是 n 个数的平方和，所以使得 Q 达到取小的原则称为平方和最小原则（即最小二乘原则），利用这个原则确定参数的方法称

为最小二乘法.

根据多元函数的极值原理,有

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_0}\right|_{\beta_0=b_0,\beta_1=b_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1x_i) = 0, \\ \left.\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_0=b_0,\beta_1=b_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1x_i)x_i = 0, \end{cases}$$

化简后得到一个关于 b_0, b_1 的二元一次方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - nb_0 - b_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i - b_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - b_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0. \end{cases}$$

称之为正规方程组,其解 b_0, b_1 为 β_0, β_1 的最小二乘估计.

由正规方程解得

$$\begin{cases} b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}, \\ b_1 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \end{cases}$$

式中

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

记

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad l_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

这样一来,b_1 又可以记为

$$b_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}}.$$

例 4 下面 12 组数据记录了糖枫树距地面 1.5 m 处的树围与树高的对应值:(0.09,6),(0.13,8.7),(0.30,10.6),(0.33,

12),(0.35,14.8),(0.41,11.8),(0.45,13.3),(0.65,19.2),(1.01,22.4),(1.32,28),(1.69,22.3),(2.7,29.1). 试求树高 y 对树围 x 的回归方程.

解 由上面的数据可算得

$$\bar{x} = 0.79,\quad \bar{y} = 16.5,$$

$$l_{xx} = 6.64,\quad l_{xy} = 57.39.$$

所以 $$b_1=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=8.64,\quad b_0=\bar{y}-b_1\bar{x}=9.67,$$

于是树高 y 对树围 x 的回归方程为

$$\hat{y} = 9.67 + 8.64x.$$

4. 全微分在近似计算中的应用

(1) 计算全增量的近似值

当 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 很小时,若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微,则 $\Delta z\approx \mathrm{d}z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$.

(2) 计算函数的近似值

当 $|x-x_0|,|y-y_0|$ 很小时,若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微,则

$$f(x) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

例 5 计算 $\sqrt{(2.02)^3+(0.97)^3}$ 的近似值.

分析 所要计算的值可以看作函数 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ 在点 $(2.02,0.97)$ 处的近似值.

解 设 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$,取 $x_0=2,y_0=1,x-x_0=0.02$, $y-y_0=-0.03$,

$$f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}},\quad f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

因为 $|x-x_0|,|y-y_0|$ 很小时

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

所以

$$\sqrt{(2.02)^3+(0.97)^3}=f(2.02,0.97)$$
$$\approx f(2,1)+f'_x(2,1)\times(0.02)+f'_y(2,1)\times(-0.03)$$
$$=\sqrt{2^3+1^3}+\frac{3\times 2^2}{2\sqrt{2^3+1^3}}\times 0.02+\frac{3\times 1^2}{2\sqrt{2^3+1^3}}\times(-0.03)$$
$$=3+0.04-0.015=3.025.$$

5. 二重积分的计算

(1) 在直角坐标系下化二重积分为累次积分

若函数 $z=f(x,y)$在区域 D 上连续，其中 D: $a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

有时为了方便起见，我们把等式右边的累次积分写成下面的形式：

$$\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

在计算上式中的累次积分时，先做里层的积分，这时 x 是参量，y 是积分变量. 把上下限代入里层的积分结果中，它便是 x 的函数了；再对 x 做定积分，得出的结果就是一个数值. 注意里层积分的上下限是外层积分的积分变量的函数，外层积分的上下限是个常量. 这种计算二重积分的方法，叫做**累次积分法**.

类似地，我们也可以把二重积分化成先对 x 后对 y 的累次积分. 其结论叙述如下：

若函数 $z=f(x,y)$在区域 D 上连续，其中 D: $c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{\text{def}}\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 在极坐标系下化二重积分为累次积分

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上连续，由极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

把二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化成极坐标系中的二重积分时，只要把被积函数中的 x 和 y 分别换成 $r\cos\theta$ 和 $r\sin\theta$，再把 $\mathrm{d}\sigma$ 换成 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 即可. 在极坐标系中同样可以把二重积分化成累次积分来计算. 即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中区域 D 在极坐标系下 D'：$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r_1(\theta)\leqslant r_2(\theta)$.

例 6 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=4$ 之间的环形区域.

解 在极坐标系中，区域 D 可以表示为

$$\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ 1 \leqslant r \leqslant 2; \end{cases}$$

而被积函数 $x^2=r^2\cos^2\theta$. 所以

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^3\mathrm{d}r\right) = \frac{15}{4}\pi.$$

例 7 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 在第一象限的部分.

解 在极坐标系中，区域 D 可以表示为

$$\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \\ 0 \leqslant r \leqslant a; \end{cases}$$

而被积函数 $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}=\mathrm{e}^{-r^2}$. 所以

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}d\sigma=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^a\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}).$$

可见,当区域 D 的边界是由圆弧与射线组成时,采用极坐标计算二重积分比较方便.

6. 二重积分的简单应用

(1) 计算平面图形的面积

例 8 计算由 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的平面图形(见图 5-1)的面积.

解 由二重积分的性质可知,当函数 $f(x,y)\equiv 1$ 时,二重积分

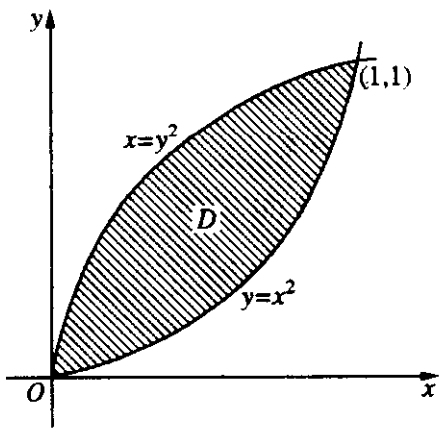


图 5-1

$\iint_D 1d\sigma$ 在数值上等于区域 D 的面积 S_D,即

$$S_D=\iint_D d\sigma,$$

其中 D 是由 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域,在直角坐标系中,它可以表示为

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2\leqslant y\leqslant \sqrt{x}.\end{cases}$$

于是由 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的平面图形面积

$$S_D=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x^{1/2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

例 9 计算半径为 R 的圆面积.

解 设 D 是 $x^2+y^2\leqslant R^2$,在极坐标系中它可以表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\0\leqslant r\leqslant R.\end{cases}$$

于是

$$S_D=\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{R^2}{2}=\pi R^2.$$

可见利用极坐标变换计算圆面积是很简单的.

(2) 计算空间立体的体积

例 10 计算由上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的空间立体(见图 5-2)的体积 V.

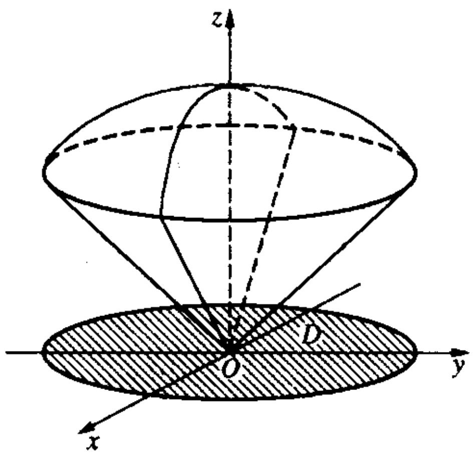


图 5-2

解 首先把这个空间体用二重积分表示出来.为此,我们分别考虑积分区域 D 与被积函数 $f(x,y)$.

两个曲面的交线方程为

$$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

可以化成

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

这个交线在 xOy 平面的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

因此,积分区域 D 为 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

我们知道,以上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 为顶,以区域 D 为底的曲顶柱体的体积 V_1 为

$$V_1 = \iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2} \mathrm{d}\sigma,$$

而以上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为顶,以区域 D 为底的曲顶柱体的体积 V_2 为

$$V_2 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}\sigma.$$

于是由上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积 V 可以表成

$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= \iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2} \mathrm{d}\sigma - \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_D (\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) \mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

然后我们来计算这个二重积分,根据区域 D 的形状、被积函数特点,可见在极坐标系中计算比较简便,为此,把区域 D 用极坐标表示:

$$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\0\leqslant r\leqslant 1.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_{D}(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\sqrt{2-r^2}-r)r\mathrm{d}r\\&=2\pi\left(\int_0^1\sqrt{2-r^2}r\mathrm{d}r-\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\right)\\&=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

(3) 计算某些广义积分

例 11 计算广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

在第四章中,我们曾指出 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数(即不可求积),不能直接用定积分方法求出它的积分值.为此我们先令

$$I=\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0).$$

再考虑二重积分

$$\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是正方形:$0\leqslant x\leqslant a$,$0\leqslant y\leqslant a$,将此二重积分化为累次积分得

$$\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)=I^2.$$

我们分别用 D_1 表示扇形 $x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0$;用 D_2 表示扇形 $x^2+y^2\leqslant 2a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0$(见图 5-3).由于 $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\geqslant 0$,故有

$$\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant I^2=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用例 7 的结果得

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \leqslant I^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}).$$

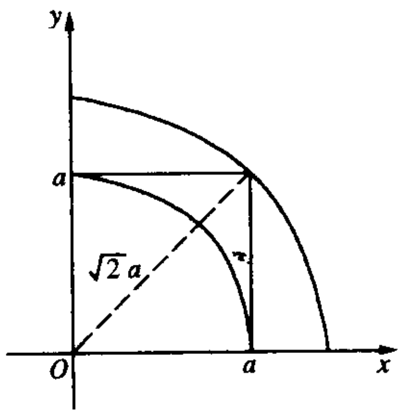


图 5-3

当 $a \to +\infty$ 时，$e^{-a^2} \to 0$，上式两边的极限都是 $\frac{\pi}{4}$，所以

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = (\lim_{a\to+\infty} I)^2 = \lim_{a\to+\infty} I^2 = \frac{\pi}{4},$$

即

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

我们称此积分为**概率积分**. 有时把它写成下面的形式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

二、习题

（一）选择题

1. 点 $M(2,-3,1)$ 关于坐标原点的对称点是（　　）.

(A) $(-2,3,-1)$；　　(B) $(-2,-3,-1)$；

(C) $(2,-3,-1)$；　　(D) $(-2,3,1)$.

2. 点 $M(2,-3,1)$ 关于 Oxy 平面的对称点是（　　）.

(A) $(-2,3,-1)$；　　(B) $(-2,-3,-1)$；

(C) $(2,-3,-1)$;　　　　(D) $(-2,3,1)$.

3. 请检验下列各点,哪一点在球面$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$上(　　).

(A) $(1,0,1)$;　　　　(B) $(2,0,2)$;

(C) $(1,1,1)$;　　　　(D) $(1,1,2)$.

4. 二元函数 $z=\arcsin(1-y)+\ln(x-y)$ 的定义域为(　　).

(A) $|1-y|\leqslant 1$ 且 $x-y>0$;

(B) $|1-y|<1$ 且 $x-y>0$;

(C) $|1-y|\leqslant 1$ 且 $x-y\geqslant 0$;

(D) $|1-y|<1$ 且 $x-y\geqslant 0$.

5. 设 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$,则 $f(x,y)=$(　　).

(A) x^2-y^2;　　　　(B) x^2+y^2;

(C) $(x-y)^2$;　　　　(D) xy.

6. 设 $x=\ln\dfrac{z}{y}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$(　　).

(A) 1;　　(B) e^x;　　(C) ye^x;　　(D) y.

7. 设 $u=xyz$,则 $du=$(　　).

(A) $yzdx$;　　　　(B) $xzdy$;

(C) $xydz$;　　　　(D) $yzdx+xzdy+xydz$.

8. 函数 $f(x,y)=2(x-y)+x^2-y^2$ 的驻点为(　　).

(A) $(1,1)$;　　　　(B) $(-1,1)$;

(C) $(1,-1)$;　　　　(D) $(-1,-1)$.

9. 点$(0,0)$是函数 $z=xy$ 的(　　).

(A) 极大值点;　　　　(B) 极小值点;

(C) 非驻点;　　　　(D) 驻点.

10. 二元函数 $z=5-x^2-y^2$ 的极大值点是(　　).

(A) $(1,0)$;　(B) $(0,1)$;　(C) $(0,0)$;　(D) $(1,1)$.

11. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可导(偏导数存在)与可微的关系是(　　).

(A) 可导必可微；　　　　(B) 可导一定不可微；

(C) 可微必可导；　　　　(D) 可微不一定可导.

12. 设 $z=e^{-\sin^2 xy^2}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　).

(A) $-e^{-\sin^2 xy^2}$；　　　　(B) $-e^{-\cos^2 xy^2}$；

(C) $-2xy\sin(2xy^2)e^{-\sin^2 xy^2}$；　(D) $-4xy\sin(xy^2)$.

13. 设 $z=2x^2+3xy-y^2$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$(　　).

(A) 6；　　(B) 3；　　(C) -2；　　(D) 2.

14. 二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy=$(　　).

(A) 1；　　(B) $\dfrac{1}{2}$；　　(C) $\dfrac{1}{4}$；　　(D) 2.

15. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则 $\displaystyle\iint\limits_D xe^{-2y}\,dx\,dy=$ (　　).

(A) $1-e^{-2}$；　(B) $\dfrac{1-e^{-2}}{4}$；　(C) $\dfrac{e^{-2}-1}{2}$；　(D) $\dfrac{1-e^{-2}}{2}$.

16. 设 D 是圆域 $x^2+y^2\leqslant 4$，则 $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=$(　　).

(A) $\dfrac{8}{3}\pi$；　　(B) $\dfrac{16}{3}\pi$；　　(C) 4π；　　(D) π.

17. 设 D 是区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$，又有

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=8\pi,$$

则 $a=$(　　).

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 4；　　(D) 8.

18. 设 D: $x^2+y^2\leqslant 4$ $(y>0)$，则 $\displaystyle\iint\limits_D dx\,dy=$(　　).

(A) 16π;　　　(B) 4π;　　　(C) 8π;　　　(D) 2π.

(二) 解答题

1. 求点$(2,-1,2)$和(a,b,c)关于:

(1) 各坐标平面; (2) 各坐标轴; (3) 原点

的对称点的坐标.

2. 求顶点为$A(2,1,4)$,$B(3,-1,2)$,$C(5,0,6)$的三角形各边的长.

3. 指出下面各方程所代表的曲面名称:

(1) $x^2+y^2=25$;

(2) $4x^2+9y^2+16z^2=144$;

(3) $x^2+2y^2-z=0$;

(4) $y^2+2y-6x+1=0$;

(5) $16x^2-64y+z^2=0$;

(6) $x^2+4x+y^2+3=0$;

(7) $x^2-2y^2+z^2=0$;

(8) $x^2+4y^2-z^2-1=0$;

(9) $x^2-y^2-z^2-16=0$;

(10) $x^2+y^2-z^2+2z-1=0$.

4. 在直角坐标系中,用联立不等式表示下面的平面区域 D:

(1) D 是由 $x=0$,$y=0$ 以及 $x+y=1$ 所围成的区域;

(2) D 是由 $y=x$,$x=1$,$x=2$ 以及 $y=2x$ 所围成的区域;

(3) D 是由 $y=\frac{1}{x}$,$x=1$,$x=2$ 以及 $y=2$ 所围成的区域;

(4) D 是 $x^2+y^2\leqslant 4$ 和 $y\geqslant 0$ 的公共部分.

5. 在极坐标系中,用联立不等式表示下面的平面区域 D:

(1) D 是 $x^2+y^2\leqslant 4$,$x^2+y^2\geqslant 1$ 的公共部分;

(2) D 是由 $y=\sqrt{4-x^2}$和 $y=0$ 所围成.

6. 求下列函数的定义域,并画出其图形.

(1) $z=\sqrt{xy}$；　(2) $z=\ln(x+y)$；

(3) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-4}$；　(4) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$.

7. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y^2$；　(2) $z=x^4+y^3$；

(3) $z=\ln\frac{y}{x}$；　(4) $z=\frac{xy}{x+y}$；

(5) $z=e^{xy}+yx^2$；　(6) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

(7) $u=x^{\frac{z}{y}}$；　(8) $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$.

8. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=x^4+3x^2y+y^3$；　(2) $z=x\ln(x+y)$.

9. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}.$$

10. 设 $z=x^y$，证明

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

11. 求下列函数的全微分：

(1) $z=x^2y$；　(2) $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$；

(3) $z=\frac{x+y}{x-y}$；　(4) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$.

12. 求下列各函数的偏导数或全导数：

(1) $z=\sqrt{u^2+v^2}$，$u=\sin x$，$v=e^x$；

(2) $z=u^2\ln v$，$u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$；

(3) $z=\frac{v}{u}$，$u=e^x$，$v=1-e^{2x}$；

(4) $z=y+f(v)$，$v=y^2-x^2$；

(5) $z=u^2v^3$，$u=x+2y$，$v=x-y$；

(6) $z=xe^y, y=\varphi(x)$.

13. 求下列函数的导数$\frac{dy}{dx}$：

(1) $xy+x^2+y^2=2$；

(2) $xy-\ln y=1$；

(3) $\sin y+e^x-xy^2=0$；

(4) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$.

14. 求下列各方程所确定的函数 $z=f(x,y)$的偏导数：

(1) $e^z-xyz=0$；

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$；

(3) $\sin(x+y-z)=z+x$；

(4) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.

15. 求由方程 $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的全微分 dz.

16. 求下列函数的极值：

(1) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$；

(2) $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

17. 求下列函数在指定条件下的极值：

(1) $z=xy$，条件：$x+y=1$；

(2) $u=xyz$，条件：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=0.\end{cases}$

18. 在半径为 a 的球内，内接一长方体，问如何选取长、宽、高，其体积最大？

19. 求空间平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 到坐标原点的距离.

20. 在抛物线 $y^2=4x$ 上找一点，使它到直线 $x-y+4=0$ 的距离最短.

21. 当 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的和为常数时，求它们乘积开 n 次根的最大值.

22. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}\sigma, D$：$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D x\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma, D$：$0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$；

(3) $\iint\limits_D (y+x^2)\mathrm{d}\sigma, D$ 是由 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围成的区域；

(4) $\iint\limits_D (x+6y)\mathrm{d}\sigma, D$ 是由 $y=x, y=2x, x=2$ 所围成的区域；

(5) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma, D$：$x^2+y^2\leqslant a^2(a>0)$；

(6) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma, D$ 是 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$ 的公共部分.

23. 计算下列曲线所围成的平面图形的面积：

(1) $y=x^2, y=x+2$；

(2) $y=x, y=\sin x, x=0, x=\pi$.

24. 计算下列曲面所界的空间立体的体积：

(1) $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$；

(2) $z=x^2+y^2, x=0, y=0, z=4$(在第一卦限中的部分).

三、分析及解答

(一) 选择题

1. 答案是：A.

分析 由于 $M(a,b,c)$ 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$，因此 $(2,3,-1)$ 关于原点的对称点是 $(-2,3,-1)$.

故选择 A.

2. 答案是：C.

分析 由于点 $M(a,b,c)$ 关于 Oxy 平面的对称点是 $(a,b,-c)$. 因此 $(2,-3,1)$ 关于 Oxy 平面的对称点是 $(2,-3,-1)$.

故选择 C.

3. 答案是：C.

分析 将各点代入球面方程验证.由于

$$(1-1)^2+1^2+(1-1)^2=1,$$

所以(1,1,1)点在球面上.

故选择 C.

4. 答案是：A.

分析 由于 $\arcsin(1-y)$ 的定义域为：$|1-y|\leqslant 1$，而 $\ln(x-y)$ 的定义域为：$x-y>0$. 因此二次函数 $z=\arcsin(1-y)+\ln(x-y)$ 的定义域为：

$$|1-y|\leqslant 1 \text{ 且 } x-y>0.$$

故选择 A.

5. 答案是：D.

分析 令 $u=x+y, v=x-y$,则有

$$f(u,v)=u\cdot v,$$

因此
$$f(x,y)=xy.$$

故选择 D.

6. 答案是：C.

分析 将函数 $x=\ln\dfrac{z}{y}$ 化成

$$x=\ln z-\ln y,$$

即

$$F(x,y,z)=\ln z-\ln y-x=0.$$

根据隐函数求导法则,有

$$F'_z=\frac{1}{z},\quad F'_x=-1.$$

因此
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=z.$$

由 $\ln z=x+\ln y$ 知

$$z = e^{x+\ln y} = ye^x.$$

故选择 C.

7. 答案是：D.

分析 由

$$\begin{aligned} du &= d(xyz) = xd(yz) + yzdx \\ &= x(ydz + zdy) + yzdx \\ &= yzdx + xzdy + xydz. \end{aligned}$$

故选择 D.

8. 答案是：D.

分析 由

$$\begin{cases} f'_x = 2 + 2x = 0, \\ f'_y = -2 - 2y = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

故选择 D.

9. 答案是：D.

分析 由

$$\begin{cases} z'_x = y = 0, \\ z'_y = x = 0 \end{cases}$$

可知(0,0)点是 $z=xy$ 的驻点. 又因为在(0,0)点附近，既可以找出点(x_1,y_1)(例如(1,1))，使

$$f(x_1,y_1) > f(0,0),$$

又可以找出点(x_2,y_2)(例如(1,−1))，使

$$f(x_2,y_2) < f(0,0),$$

因此(0,0)点不是极大值点，也不是极小值点.

故选择 D.

10. 答案是：C.

分析 由

$$\begin{cases} z'_x = -2x = 0, \\ z'_y = -2y = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

又由于 $z=5-x^2-y^2 \leqslant 5$，可见(0,0)是极大值点.

故选择 C.

11. 答案是：C.

分析 与一元函数不同，二元函数在一点可导是指偏导数存在.因为函数 $f(x,y)$ 的偏导数仅描述了函数在一点处沿着坐标轴的变化率，而全微分是描述了函数沿各个方向的变化状况.

我们可以证明函数 $z=f(x,y)$ 可微一定可导，也可举例说明函数在一点虽然可导，但不连续，当然更谈不上可微了.

故选择 C.

12. 答案是：C.

分析 由复合函数求导法则，有：

$$\begin{aligned} z'_y &= e^{-\sin^2 xy^2} \cdot (-\sin^2 xy^2)'_y \\ &= e^{-\sin^2 xy^2}(-2\sin xy^2) \cdot (\sin xy^2)'_y \\ &= -2\sin xy^2 e^{-\sin^2 xy^2} \cdot \cos xy^2 \cdot (xy^2)'_y \\ &= -\sin(2xy^2)e^{-\sin^2 xy^2} \cdot 2xy \\ &= -2xy\sin(2xy^2)e^{-\sin^2 xy^2}. \end{aligned}$$

故选择 C.

13. 答案是：B.

分析 由于 $z'_x=4x+3y$，而

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 3.$$

故选择 B.

14. 答案是：C.

分析

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xy\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 y\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\right)\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1\right)=\frac{1}{4}.$$

故选择 C.

15. 答案是：B.

分析

$$\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2}-1)\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-2}).$$

故选择 B.

16. 答案是：B.

分析 将区域 D 改为极坐标表示：

$$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\0\leqslant r\leqslant 2.\end{cases}$$

于是有

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^2=\frac{16}{3}\pi.$$

故选择 B.

17. 答案是：B.

分析 将区域 D 用极坐标表示：

$$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\0\leqslant r\leqslant a.\end{cases}$$

于是有

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{r^4}{4}\bigg|_0^a$$

$$=\frac{\pi}{2}a^4=8\pi.$$

可见 $a^4=16$. 所以 $a=2$.

故选择 B.

18. 答案是: D.

分析 将区域 D 化成极坐标,

$$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\0\leqslant r\leqslant 2,\end{cases}$$

于是,有

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r=\pi\cdot\frac{r^2}{2}\bigg|_0^2=2\pi.$$

故选择 D.

(二) 解答题

1. **解** (1) 关于 xOy 平面对称点的坐标分别是 $(2,-1,-2)$, $(a,b,-c)$; 关于 yOz 平面对称点的坐标分别是 $(-2,-1,2)$, $(-a,b,c)$; 关于 zOx 平面对称点的坐标分别是 $(2,1,2)$, $(a,-b,c)$.

(2) 关于 x 轴对称点的坐标分别是 $(2,1,-2)$, $(a,-b,-c)$; 关于 y 轴对称点的坐标分别是 $(-2,-1,-2)$, $(-a,b,-c)$; 关于 z 轴对称点的坐标分别是 $(-2,1,2)$, $(-a,-b,c)$.

(3) 关于原点对称点的坐标分别是 $(-2,1,-2)$, $(-a,-b,-c)$.

2. **解** 根据两点距离公式,得到

$$|AB|=\sqrt{(3-2)^2+(-1-1)^2+(2-4)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3;$$

$$|BC| = \sqrt{(5-3)^2 + (0+1)^2 + (6-2)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21};$$

$$|CA| = \sqrt{(2-5)^2 + (1-0)^2 + (4-6)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

3. **答**　(1) $x^2+y^2=25$.

曲面是一个圆柱面，它的准线是 xOy 平面上以原点为圆心、半径为 5 的圆周，母线平行于 z 轴.

(2) $4x^2+9y^2+16z^2=144$.

曲面是一个椭球面，它的中心是原点，长半轴、中半轴和短半轴分别为 6、4 和 3.

(3) $x^2+2y^2-z=0$.

曲面是一个椭圆抛物面，它过原点并且关于 z 轴对称.

(4) $y^2+2y-6x+1=0$.

曲面是一个抛物柱面，它的准线是 xOy 平面上的抛物线 $(y+1)^2=6x$，母线平行于 z 轴.

(5) $16x^2-64y+z^2=0$.

曲面是一个椭圆抛物面，它过原点并且关于 y 轴对称.

(6) $x^2+4x+y^2+3=0$.

曲面是一个圆柱面，它的准线是 xOy 平面上以 $(-2,0)$ 点为圆心、半径为 1 的圆周，母线平行于 z 轴.

(7) $x^2-2y^2+z^2=0$.

曲面是一个圆锥面，它的顶点是原点，并且关于 y 轴对称.

(8) $x^2+4y^2-z^2-1=0$.

曲面是一个单叶双曲面，它的腰椭圆[①]是 $x^2+4y^2=1$.

---

① 腰椭圆是指单叶双曲面与坐标平面所交的椭圆周.

(9) $x^2-y^2-z^2-16=0$.

曲面是一个双叶双曲面，它与 yOz 平面不相交.

(10) $x^2+y^2-z^2+2z-1=0$.

曲面是一个圆锥面，它的顶点是(0,0,1)，并且关于 z 轴对称.

4. **解** (1) 首先在平面直角坐标系中作出区域 D(见图 5-4).

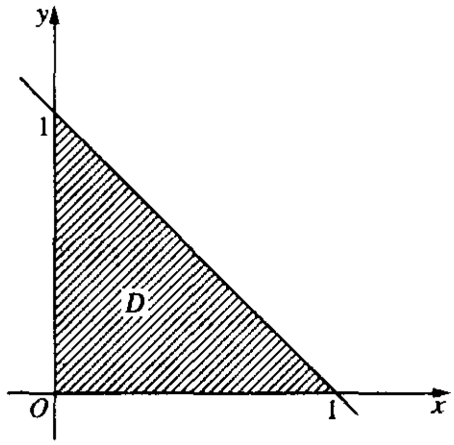


图 5-4

可见区域 D 上的点的横坐标的变化范围为区间[0,1]. 对于区间[0,1]上的任何 x 值，区域 D 上以这 x 值为横坐标的点的纵坐标都介于 0 与 $1-x$ 之间.

故表示区域 D 的联立不等式为

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x. \end{cases}$$

(2) 首先在平面直角坐标系中作出区域 D(见图 5-5).

可见区域 D 上的点的横坐标的变化范围为区间[1,2]. 对于区间[1,2]上的任何 x 值，区域 D 上以这 x 值为横坐标的点的纵坐标都介于 x 与 $2x$ 之间.

故表示区域 D 的联立不等式为

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \leqslant y \leqslant 2x. \end{cases}$$

(3) 首先在平面直角坐标系中作出区域 D(见图 5-6).

可见区域 D 上的点的横坐标的变化范围为区间[1,2]. 对于区间[1,2]上的任何 x 值，区域 D 上以这 x 值为横坐标的点的纵坐标都介于$\frac{1}{x}$与 2 之间.

故表示区域 D 的联立不等式为

$$\begin{cases}1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant 2.\end{cases}$$

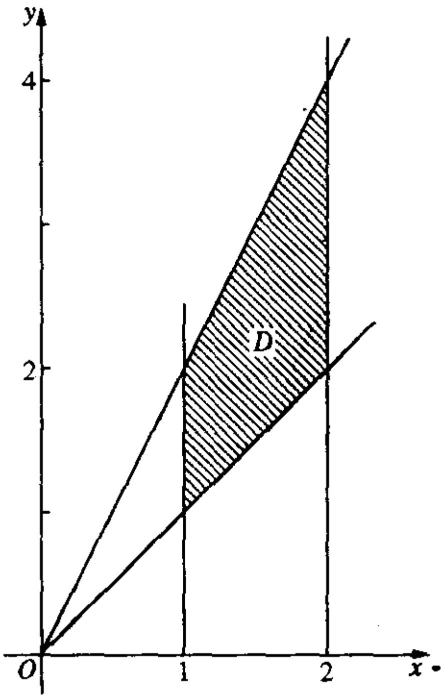


图 5-5

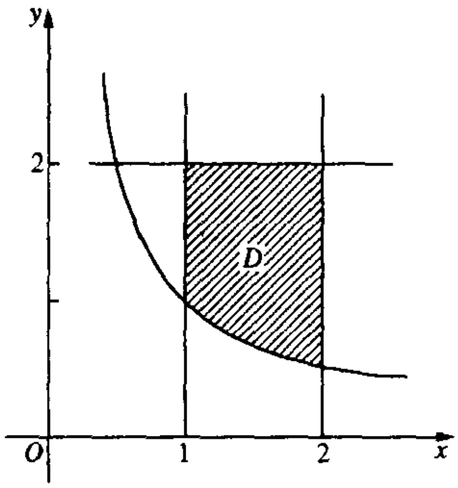


图 5-6

(4) 首先在平面直角坐标系中作出区域 D(见图 5-7).

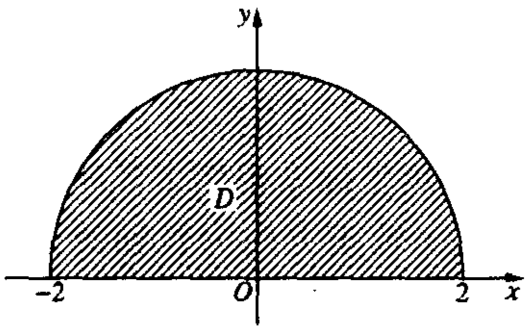


图 5-7

可见区域 D 的点的横坐标的变化范围为区间$[-2,2]$. 对于区间$[-2,2]$上的任何 x 值,区域 D 上以这 x 值为横坐标的点的纵坐标都介于 0 与 $\sqrt{4-x^2}$之间.

故表示区域 D 的联立不等式为

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{4-x^2}.\end{cases}$$

5. **解** (1) 首先在平面直角坐标系中作出区域 D(见图 5-8).

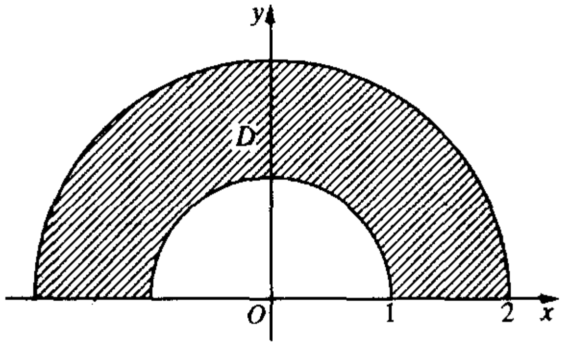


图 5-8

在以原点为极点、x 轴正方向为极轴的极坐标系中考虑区域 D. 可见 D 上的点的极角的变化范围为区间$[0,\pi]$. 对于区间$[0,\pi]$上的任何 θ 值,区域 D 上以这 θ 值为极角的极径 r 都介于 1 与 2 之间.

故表示区域 D 的联立不等式为

$$\begin{cases}0\leqslant \theta\leqslant \pi,\\ 1\leqslant r\leqslant 2.\end{cases}$$

(2) 首先在平面直角坐标系中作出区域 D(见图 5-7).

在以原点为极点、x 轴正方向为极轴的极坐标系中考虑区域 D. 可见 D 上的点的极角的变化为区间$[0,\pi]$. 对于区间$[0,\pi]$上的任何 θ 值,区域 D 上以这 θ 值为极角的极径 r 都介于 0 与 2 之间.

故表示区域 D 的联立不等式为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ 0\leqslant r\leqslant 2.\end{cases}$$

6. **解** (1) 要使函数 $z=\sqrt{xy}$有意义，必须满足

$$xy \geqslant 0,$$

即

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x\leqslant 0, \\ y\leqslant 0, \end{cases}$$

所以函数的定义域(见图 5-9)为

$$D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ 或 } x \leqslant 0, y \leqslant 0\}.$$

(2) 要使函数 $z=\ln(x+y)$有意义，必须满足

$$x + y > 0,$$

所以函数的定义域(见图 5-10)为

$$D = \{(x,y) \mid x + y > 0\}.$$

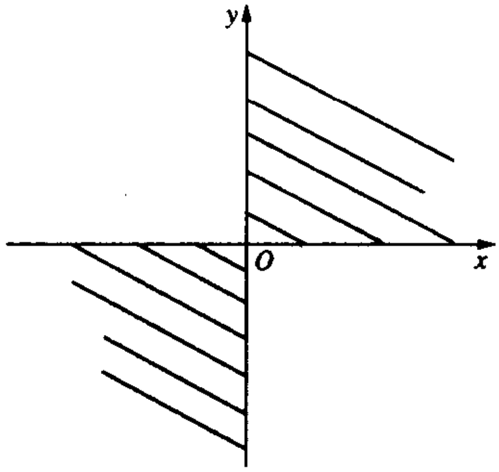


图 5-9

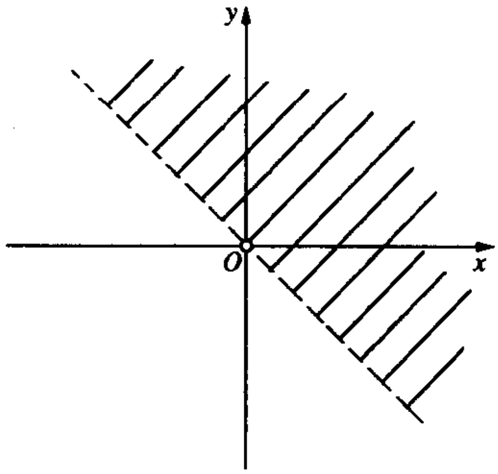


图 5-10

(3) 要使函数

$$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-4}$$

有意义，必须满足

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geqslant 0, \\ y^2 - 4 \geqslant 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ |y| \geqslant 2, \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}-1 \leqslant x \leqslant 1, \\ y \geqslant 2,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}-1 \leqslant x \leqslant 1, \\ y \leqslant -2,\end{cases}$$

所以函数的定义域(见图 5-11)为

$$D=\{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, y \geqslant 2 \text{ 或 } -1 \leqslant x \leqslant 1, y \leqslant -2\}.$$

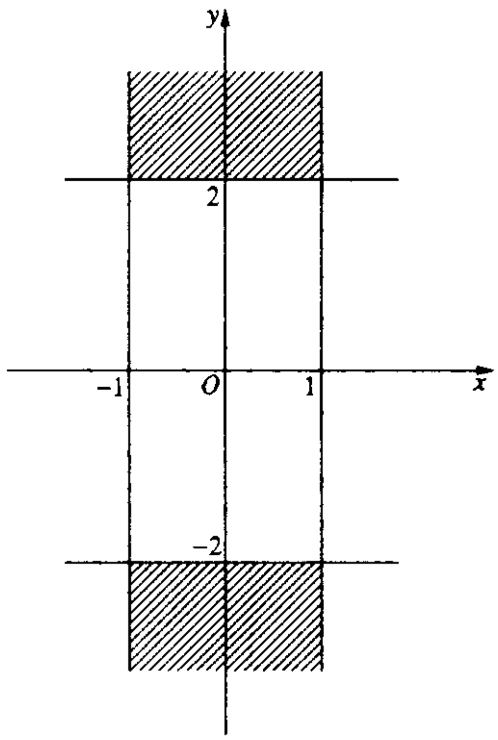


图 5-11

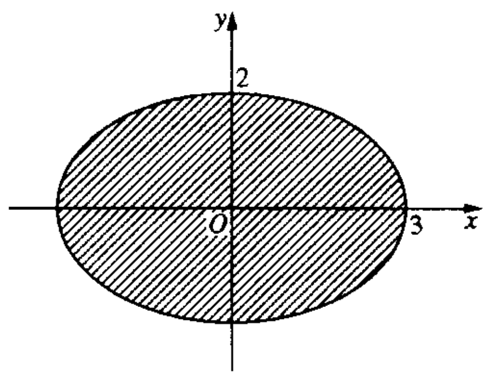


图 5-12

(4) 要使函数 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$ 有意义，必须满足

$$1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4} \geqslant 0,$$

即

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leqslant 1,$$

所以函数的定义域(见图 5-12)为

$$D=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right.\right\}.$$

7. **解** (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2)=3x^2y^2$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2)=2x^3y.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4+y^3)=4x^3$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^4+y^3)=3y^2.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{y}.$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{(x+y)^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{xy}+yx^2)=\mathrm{e}^{xy}\cdot y+2xy=(\mathrm{e}^{xy}+2x)y$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{xy}+yx^2)=\mathrm{e}^{xy}\cdot x+x^2=(\mathrm{e}^{xy}+x)x.$$

(6) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

同理

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^{\frac{z}{y}})=\frac{z}{y}x^{\frac{z}{y}-1}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^{\frac{z}{y}})=x^{\frac{z}{y}}\cdot\ln x\left(-\frac{z}{y^2}\right)=-\frac{z}{y^2}x^{\frac{z}{y}}\ln x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(x^{\frac{z}{y}})=x^{\frac{z}{y}}\cdot\ln x\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y}x^{\frac{z}{y}}\ln x.$$

(8) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)=-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)=\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)=\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2}.$$

8. **解** (1) 因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4+3x^2y+y^3)=4x^3+6xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^4+3x^2y+y^3)=3x^2+3y^2;$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(4x^3+6xy)=12x^2+6y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3+6xy)=6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+3y^2)=6y.$$

(2) 因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\ln(x+y))=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x\ln(x+y))=\frac{x}{x+y};$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}\right)$$

$$=\frac{1}{x+y}+\frac{(x+y)-x}{(x+y)^2}=\frac{x+2y}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}\right)$$

$$=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right)=-\frac{x}{(x+y)^2}.$$

9. **证明** 因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y}))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$$

而

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y}))=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right);$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$+\frac{y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\sqrt{y}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

10. **证明** 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=yx^{y-1}$，而

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^y)=x^y\ln x;$$

所以 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2x^y=2z.$

11. **解** (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\frac{\partial z}{\partial y}=x^2;$

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xydx+x^2dy.$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{2\sqrt{xy}},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{\sqrt{xy}}{2y^2};$$

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{2\sqrt{xy}}dx-\frac{\sqrt{xy}}{2y^2}dy.$

(3) $z=\frac{x+y}{x-y}=\frac{x-y+2y}{x-y}=1+\frac{2y}{x-y},$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2y}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y)+2y}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2};$$

所以 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{2y}{(x-y)^2}\mathrm{d}x+\frac{2x}{(x-y)^2}\mathrm{d}y$

$$=\frac{2}{(x-y)^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x).$$

(4) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},$

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2};$

所以 $\mathrm{d}z=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z).$$

12. **解** (1) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}};$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos x,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x.$

所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\cos x+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{e}^x.$

(2) $\frac{\partial z}{\partial u}=2u\ln v,\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u^2}{v};$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2};\frac{\partial v}{\partial x}=3,\frac{\partial v}{\partial y}=-2.$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u(\ln v)\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2}{y}u\ln v+\frac{3}{v}u^2,$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u(\ln v)\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}(-2)$

$$=-\frac{2}{y^2}ux\ln v-\frac{2}{v}u^2.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{v}{u^2},\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u};$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-2\mathrm{e}^{2x}.$$

所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{v}{u^2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{u}2\mathrm{e}^{2x}$

$$=-\frac{1-u^2}{u^2}u-\frac{2}{u}u^2=u-u^{-1}-2u=-u^{-1}-u.$$

(4) 设 $z=F(y,u)=y+u,u=f(v)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=f'(v);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-2x.$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=1\times 0+f'(v)(-2x)$

$$=-2x\cdot f'(v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=1+f'(v)2y=1+2yf'(v).$$

(5) $\frac{\partial z}{\partial u}=2uv^3,\frac{\partial z}{\partial v}=3u^2v^2;$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=2;\frac{\partial v}{\partial x}=1,\frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2uv^3\cdot 1+3u^2v^2\cdot 1$

$$=uv^2(2v+3u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2uv^3\cdot 2+3u^2v^2(-1)$$

$$=uv^2(4v-3u).$$

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^y,\frac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^y;\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x).$

所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^y\cdot 1+x\mathrm{e}^y\cdot\varphi(x)$

$$=\mathrm{e}^y(1+x\varphi(x)).$$

13. **解** (1) 设 $F(x,y)=xy+x^2+y^2-2$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y+2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x+2y;$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{y+2x}{x+2y}.$

(2) 设 $F(x,y)=xy-\ln y-1$,则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x-\frac{1}{y};$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{y}{x-\dfrac{1}{y}}=\dfrac{y^2}{1-xy}.$

(3) 设 $F(x,y)=\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2$,则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\mathrm{e}^x-y^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\cos y-2xy;$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{\mathrm{e}^x-y^2}{\cos y-2xy}=\dfrac{y^2-\mathrm{e}^x}{\cos y-2xy}.$

(4) 设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$,则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2};$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{\dfrac{x+y}{x^2+y^2}}{\dfrac{y-x}{x^2+y^2}}=\dfrac{x+y}{x-y}.$

14. **解** (1) 设 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xyz$,则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-yz,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-xz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=e^z-xy;$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{-xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{e^z-xy}.$$

(2) 设 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3yz,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3xz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy;$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{3y^2-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz-y^2}{z^2-xy}.$$

(3) 设 $F(x,y,z)=\sin(x+y-z)-z-x$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos(x+y-z)-1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\cos(x+y-z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\cos(x+y-z)\cdot(-1)-1=-\cos(x+y-z)-1;$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\cos(x+y-z)-1}{-\cos(x+y-z)-1}$$

$$=\frac{\cos(x+y-z)-1}{1+\cos(x+y-z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\cos(x+y-z)}{-\cos(x+y-z)-1}$$

$$=\frac{\cos(x+y-z)}{1+\cos(x+y-z)}.$$

(4) 设 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$,则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{z},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{\frac{z}{y}}\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{x+z}{z^2},$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z}{x+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z^2}{(x+z)y}.$$

15. **解** 设 $F(x,y,z)=\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z-1$,则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\sin 2y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-\sin 2z;$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{-\sin 2x}{-\sin 2z}=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}.$$

故 $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}dx-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}dy$$
$$=-\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2x dx+\sin 2y dy).$$

16. **解** （1）由 $z'_x=2x+y+1, z'_y=x+2y-1$. 令
$$\begin{cases}2x+y+1=0,\\x+2y-1=0.\end{cases}$$

解上面方程组得到驻点
$$\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$$

而 $$A=z''_{xx}\Big|_{(-1,1)}=2>0,$$
$$B=z''_{xy}\Big|_{(-1,1)}=1,\quad C=z''_{yy}\Big|_{(-1,1)}=2;$$

有 $AC-B^2=4-1=3>0$.

所以函数 $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$ 在 $(-1,1)$ 点有极小值：$z(-1,1)=0$.

（2）由 $z'_x=4-2x, z'_y=-4-2y$. 令
$$\begin{cases}4-2x=0,\\-4-2y=0.\end{cases}$$

解上面方程组得到驻点
$$\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$$

而 $$A=z''_{xx}\Big|_{(2,-2)}=-2<0,$$
$$B=z''_{xy}\Big|_{(2,-2)}=0,\quad C=z''_{yy}\Big|_{(2,-2)}=-2;$$

有 $AC-B^2=4-0=4>0$.

所以函数 $z=4(x-y)-x^2-y^2$ 在 $(2,-2)$ 点有极大值：
$$z(2,-2)=8.$$

17. **解** （1）设 $F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x+y-1)$，令

$$\begin{cases} F'_x = y - \lambda = 0, \\ F'_y = x - \lambda = 0, \\ F'_\lambda = -(x + y - 1) = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{1}{2}, \\ \lambda = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

因此，驻点为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 由于在$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$附近满足条件：$x+y=1$的其它点$(x,y)$恒有

$$z(x,y) = xy = x(1-x) < \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

可见，函数在$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$处取得极大值：$z=\dfrac{1}{4}$.

(2) 为了讨论方便，首先考虑

$$g = \ln|u| = \ln|x| + \ln|y| + \ln|z|$$

的极值. 为此

设函数

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda,\mu) = &\ln|x| + \ln|y| + \ln|z| \\ &- \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z), \end{aligned}$$

令

$$(\mathrm{I})\begin{cases} F'_x = \dfrac{1}{x} - 2\lambda x - \mu = 0, \\ F'_y = \dfrac{1}{y} - 2\lambda y - \mu = 0, \\ F'_z = \dfrac{1}{z} - 2\lambda z - \mu = 0, \\ F'_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \\ F'_\mu = -(x + y + z) = 0, \end{cases}$$

得到

$$
(\text{I})\begin{cases}1-2\lambda x^2-\mu x=0, & ①\\ 1-2\lambda y^2-\mu y=0, & ②\\ 1-2\lambda z^2-\mu z=0, & ③\\ x^2+y^2+z^2=1, & ④\\ x+y+z=0. & ⑤\end{cases}
$$

把①②③式相加,将④⑤代入后,得到

$$3-2\lambda=0,\quad \lambda=\frac{3}{2}.$$

这样再由方程组(Ⅰ)得到

$$\frac{1}{x}-3x=\frac{1}{y}-3y=\frac{1}{z}-3z.$$

由$\frac{1}{x}-3x=\frac{1}{y}-3y$解得

$$x=y\quad 或\quad x=-\frac{1}{3y}.$$

同理可得 $x=z$ 或 $x=-\frac{1}{3z}$;

以及 $y=z$ 或 $y=-\frac{1}{3z}$.

以上这些解可配置成各种不同情况.

若$\begin{cases}x=y\\ x=z\end{cases}$,即 $x=y=z$. 这时由于不能同时满足方程④、⑤,也就是说,它们不满足约束条件,所以不是解;

若$\begin{cases}x=y\\ x=-\frac{1}{3z}\end{cases}$,即 $x=y=-\frac{1}{3z}$,代入方程⑤得

$$z-\frac{2}{3z}=0,$$

即 $z=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}$,这时 $x=y=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$.

显然这些解也满足方程④.

根据上面的讨论,由方程中 x,y,z 的对称性可知共有 6 组不

同的解：

$$X_1:\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z=-\dfrac{2}{\sqrt{6}};\end{cases}\qquad X_2:\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y=-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}};\end{cases}$$

$$X_3:\begin{cases}x=-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{6}};\end{cases}\qquad X_4:\begin{cases}x=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z=\dfrac{2}{\sqrt{6}};\end{cases}$$

$$X_5:\begin{cases}x=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y=\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{6}};\end{cases}\qquad X_6:\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}.\end{cases}$$

因此，函数 $g=\ln|u|=\ln|xyz|$ 有 6 个驻点 $X_i(i=1,2,\cdots,6)$. 可以验证它们都是极值点.

由于 $g=\ln|u|$，在点 $X_i(i=1,2,3)$ 处，$u=-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}<0$；而在点 $X_j(j=4,5,6)$ 处，$u=\dfrac{1}{3\sqrt{6}}>0$. 可知函数 $u=xyz$ 在 $X_i(i=1,2,3)$ 处取极小值：$u=-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$；而在 $X_j(j=4,5,6)$ 处取极大值：$u=\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

18. **解** 设半球的球心在原点、并且内接长方体的棱分别与各坐标轴平行(见图 5-13)，长方体上的 P 点坐标为(x,y,z). 于

是，长方体的长、宽、高分别为 $2x$、$2y$ 及 z. 问题化成在 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的条件下，求体积函数

$$V=V(x,y,z)=2x\cdot 2y\cdot z=4xyz$$

的最大值.

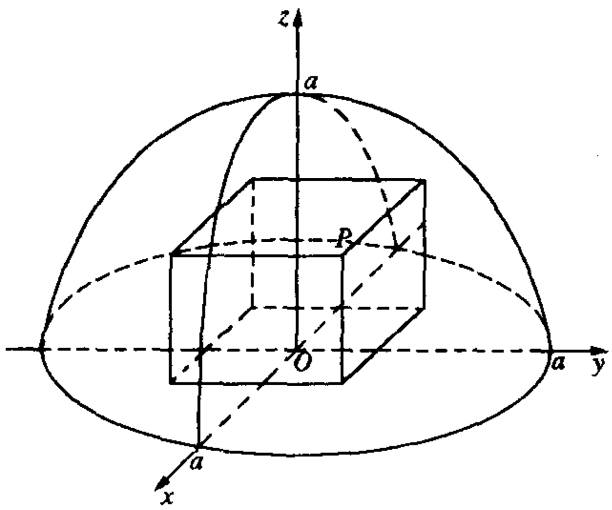


图 5-13

设 $F(x,y,z,\lambda)=4xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$，令

$$\begin{cases} F'_x=4yz-2x\lambda=0, & ① \\ F'_y=4xz-2y\lambda=0, & ② \\ F'_z=4yx-2z\lambda=0, & ③ \\ F'_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-a^2)=0. & ④ \end{cases}$$

由①②③式，得到：$\dfrac{yz}{x}=\dfrac{xz}{y}=\dfrac{xy}{z}=\dfrac{\lambda}{2}$，即 $x=y=z=\dfrac{\lambda}{2}$，代入④式得到

$$\lambda=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}a \quad (\text{这里只能取 + 号}).$$

因此，驻点为$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$. 这时长方体的长、宽、高分别为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

由问题本身可以看出，在一定条件下，此内接长方体只在半球内取得最大值，并且所求得的驻点是惟一的，所以当长、宽、高分别为$\frac{2a}{\sqrt{3}}$，$\frac{2a}{\sqrt{3}}$，$\frac{a}{\sqrt{3}}$时，内接长方体体积最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}a^3$.

19. **解** 点到平面的距离就是该点到平面的垂线段的长度，也就是该点与平面上各点之间距离的最小值. 据此，这是一个条件极值问题. 其中目标函数是原点$O(0,0,0)$与空间一点$P(x,y,z)$之间的距离. 约束条件是P点在平面上，坐标(x,y,z)应该满足平面方程，即求$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在条件$Ax+By+Cz+D=0$下的最小值.

由于d的表达式含有根式，处理起来很麻烦. 注意到当$d^2=x^2+y^2+z^2$取得最小值时，d也取得最小值，所以，我们转而求d^2的最小值. 作拉格朗日函数

$$x^2+y^2+z^2+\lambda(Ax+By+Cz+D).$$

分别对x,y,z,λ求导，列出方程组

$$\begin{cases}2x+A\lambda=0,\\2y+B\lambda=0,\\2z+C\lambda=0,\\Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$$

将前三个方程分别乘以A,B,C相加，然后减去第四个方程的两倍，得到

$$(A^2+B^2+C^2)\lambda-2D=0,$$

解得
$$\lambda=\frac{2D}{A^2+B^2+C^2}.$$

此时，虽然将λ代入前三个方程即可求出极点，进而求出极值，但演算比较麻烦. 我们直接来求极值. 将前三个方程分别化为

$$\begin{cases}x=-A\lambda/2,\\y=-B\lambda/2,\\z=-C\lambda/2.\end{cases}$$

两边分别平方，得到

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2(A^2 + B^2 + C^2)/4,$$

将 λ 代入，得到

$$d^2 = \frac{D^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

由实际问题中最小值的存在性，得到问题的解. 坐标原点到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

20. **解** 设在抛物线上的点为 (x,y)，由点到直线距离公式，得到点 (x,y) 到直线 $x-y+4=0$ 的距离为

$$d = \frac{|x - y + 4|}{\sqrt{2}}.$$

为了简化讨论，我们考虑函数

$$D(x,y) = (x - y + 4)^2$$

在条件 $y^2-4x=0$ 下的极值. 为此

设 $F(x,y,\lambda)=(x-y+4)^2-\lambda(y^2-4x)$，令

$$\begin{cases} F'_x = 2(x - y + 4) + 4\lambda = 0, & ① \\ F'_y = 2(x - y + 4)(-1) - 2y\lambda = 0, & ② \\ F'_\lambda = -(y^2 - 4x) = 0. & ③ \end{cases}$$

把①②式相加便得到 $y=2$，代入③式得到 $x=1$.

因此，驻点为 $(1,2)$.

由问题本身可以看出，在一定条件下，此距离应取最小值，并且求出的驻点是惟一的. 所以抛物线 $y^2=4x$ 上的点 $(1,2)$ 到直线 $x-y+4=0$ 的距离最短.

21. **解** 为了讨论方便，我们不妨假设 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = nA$，这时 n 个

正数的算术平均 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=A$. 令

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i},$$

于是问题化成在条件 $\sum_{i=1}^{n}x_i=nA$ 下，求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最大值. 为此

设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-nA\right)$，令

$$\begin{cases}F'_{x_j}=\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big/x_j\right)-\lambda=0 \quad (j=1,2,\cdots,n),\\ F'_{\lambda}=-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-nA\right)=0,\end{cases}$$

解上述方程，得到 $x_i=x_j(i,j=1,2,\cdots,n)$，于是有

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=A.$$

因此，驻点为 $(A,A,\cdots,A)$.

由问题本身可以看出，在上述条件下，n 个正数乘积开 n 次根有最大值，并且求出的驻点是惟一的. 所以 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 乘积开 n 次根的最大值为 A.

22. **解** (1) $\iint\limits_D xe^{xy}d\sigma=\int_0^1dx\int_0^1xe^{xy}dy=\int_0^1dx\int_0^1e^{xy}d(xy)$

$$=\int_0^1\left(e^{xy}\Big|_0^1\right)dx=\int_0^1(e^x-1)dx$$

$$=(e^x-x)\Big|_0^1=e-2.$$

(2) $\iint\limits_D x\sin(x+y)d\sigma=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)dy$

$$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)d(x+y)$$

$$=-\int_0^{\pi}\left(x\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}(\sin x-\cos x)$$

$$=x(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$-\int_0^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi-2.$$

(3) 首先作出积分区域 D(见图 5-14),它可由不等式 $0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$ 所确定,因此

$$\iint\limits_D(y+x^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(y+x^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[\left(\frac{y^2}{2}+x^2y\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{2}+x^2\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{3}{10}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{7}-\frac{3}{10}=\frac{33}{140}.$$

(4) 首先作出积分区域 D(见图 5-15),它可由不等式 $0\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2x$ 所确定. 因此

$$\iint\limits_D(x+6y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}(x+6y)\mathrm{d}y=\int_0^2\left[(xy+3y^2)\Big|_x^{2x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(2x^2+12x^2-x^2-3x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2 10x^2\mathrm{d}x=\frac{10}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{80}{3}.$$

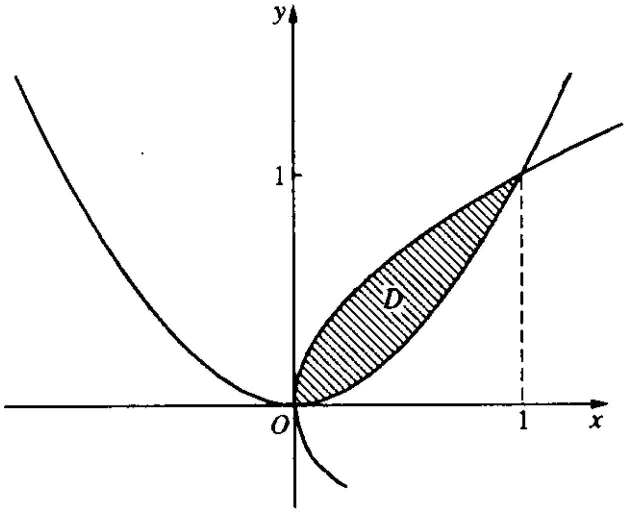


图 5-14

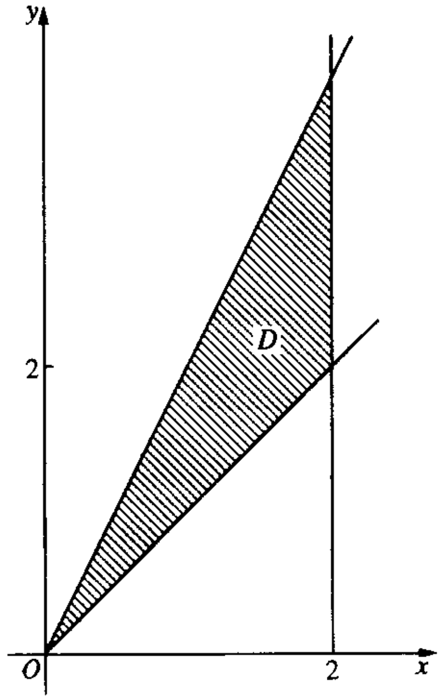


图 5-15

(5) 首先作出积分区域 D(见图 5-16),它可由不等式 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant a$ 所确定. 因此

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}r^3\bigg|_0^a\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}a^3\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

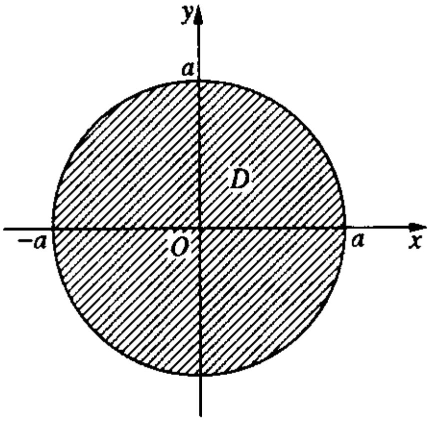


图 5-16

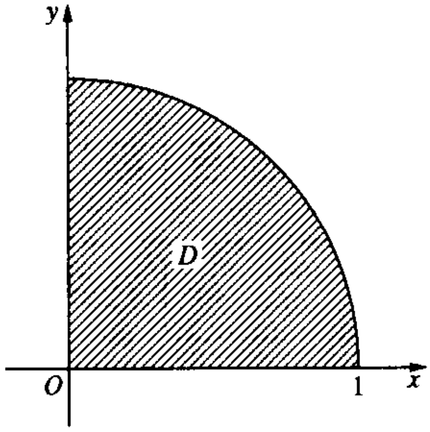


图 5-17

(6) 首先作出积分区域 D(见图 5-17),它可由不等式 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant r\leqslant 1$ 所确定. 因此

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\mathrm{d}(-r^2)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\bigg|_0^1\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

23. **解** (1) 作出区域 D 的图形(见图 5-18),可见它可由不等式 $-1\leqslant x\leqslant 2$,$x^2\leqslant y\leqslant x+2$ 所确定. 因此区域 D 的面积

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x+2}\mathrm{d}y=\int_{-1}^2(x+2-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{-1}^2=4\frac{1}{2}.$$

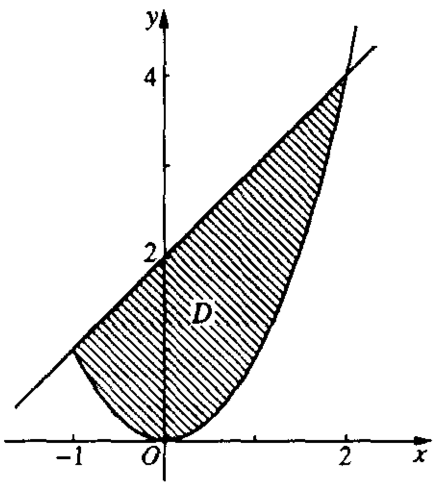


图 5-18

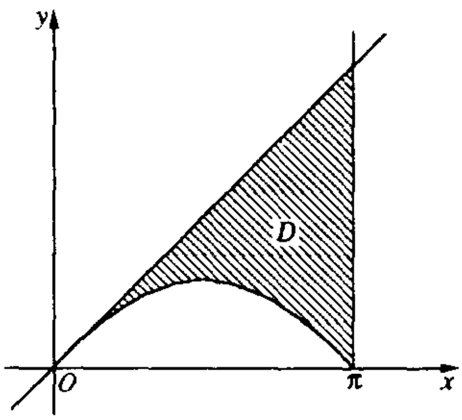


图 5-19

(2) 作出区域 D 的图形(见图 5-19),可见它可由不等式 $0\leqslant x\leqslant\pi$,$\sin x\leqslant y\leqslant x$ 所确定. 因此区域 D 的面积

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{x}\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}(x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \cos x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

24. **解** (1) 如图 5-20 所示，此空间体在 xOy 平面上的投影区域 D(见图 5-21)可由不等式 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x$ 所确定，因此空间体的体积为

$$V = \iint_D (1 + x + y) \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (1 + x + y) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(y + xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^{1-x} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[1 - x + x(1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x)^2 \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} x^2 - x \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{3}{2} x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

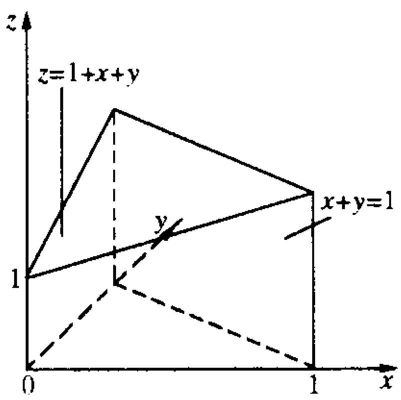


图 5-20

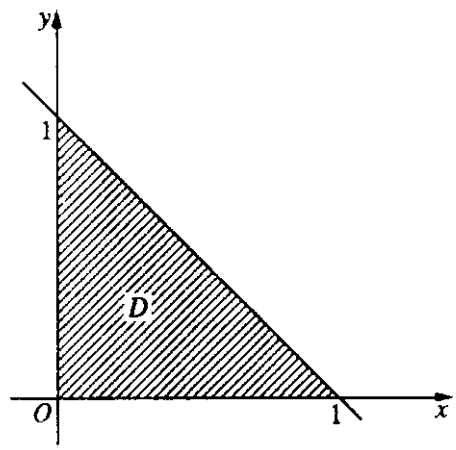


图 5-21

(2) 如图 5-22 所示，此空间体在 xOy 平面上的投影区域 D(见图 5-23)可由不等式：$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 2$ 所确定，因此空间体的体积为

$$V = \iint_D 4 - (x^2 + y^2) \mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 (4 - r^2) \cdot r \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \frac{1}{2}(4 - r^2)\mathrm{d}r^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right) \Big|_0^2 \mathrm{d}\theta$$

$$= (8 - 4)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

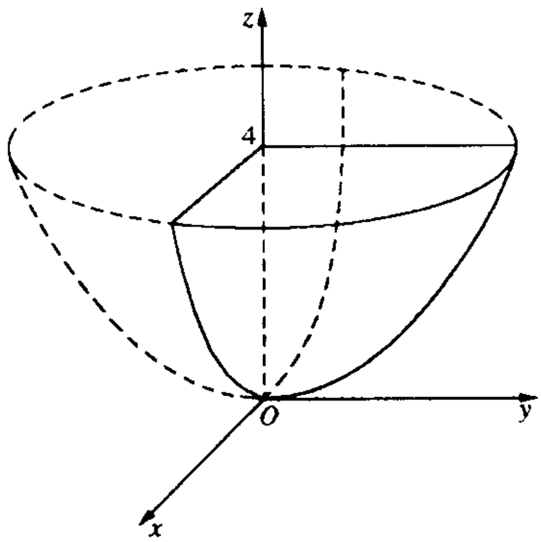


图 5-22

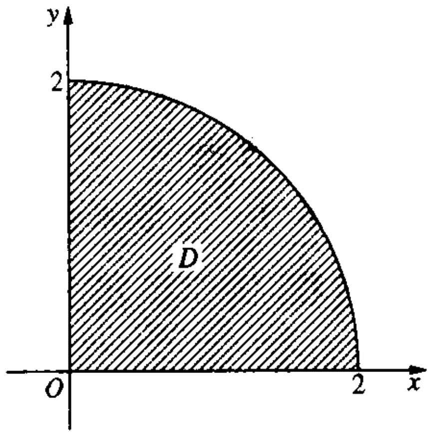


图 5-23

第六章　常微分方程

一、内容提要

（一）重要概念及性质

1. 微分方程

定义 6.1　一般来说，含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**. 例如在方程$\frac{dy}{dx}=2x$中，含有未知函数$y(x)$的导数，而在方程$\frac{d^2S}{dt^2}=g$中，含有未知函数$S(t)$的二阶导数，因而它们都是微分方程.

2. 常微分方程

未知函数是一元的微分方程称为**常微分方程**，一般可表示为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

的形式.

3. 微分方程阶数

方程中的未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶数**. 例如$\frac{dy}{dx}=2x$为一阶方程，而$\frac{d^2S}{dt^2}=g$为二阶方程.

4. 线性微分方程与非线性微分方程

定义 6.2　如果方程中的未知函数及其各阶导数就总体而言都是一次幂的，那么称之为**线性方程**，否则称为**非线性**的. 例如$y''+y'+y=\sin x$是一个二阶线性方程，$y'''+y=0$是三阶线性方程，而$y'=x^2+y^2$和$y'\cdot y=4$都是一阶非线性方程.

5. 微分方程的解

如果把某一函数代入一个微分方程以后，使得该方程成为恒等式，那么这个函数称为此方程的一个**解**. 不含有任意常数的解称为**特解**. 含有任意常数的个数与方程的阶数相同的解称为**通解**.

6. 初值条件与初始问题

由方程的通解确定特解的条件称为**初值条件**（有时也称为**定解条件**）. 带有初值条件的微分方程求解问题称为**初值问题**. 例如 $S=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是方程 $\frac{d^2S}{dt^2}=g$ 的通解，而 $S=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$ 是方程满足初值条件

$$\begin{cases} S\big|_{t=0}=0, \\ \dfrac{dS}{dt}\bigg|_{t=0}=v_0 \end{cases}$$

的一个特解.

7. 变量可分离的方程

定义 6.3 形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\cdot Q(y)$$

的方程，称为**变量可分离的方程**.

8. 一阶线性微分方程

定义 6.4 形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

的方程，称为**一阶线性**方程，当 $Q(x)\neq 0$ 时叫做**线性非齐次**方程；当 $Q(x)\equiv 0$ 时叫做**线性齐次**方程.

9. 二阶常系数线性微分方程

定义 6.5 在二阶微分方程中，形如

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{1}$$

的方程称为**二阶线性微分方程**. 若 $f(x)\neq 0$，则称(1)式为**线性非**

齐次方程. 若 $f(x)\equiv 0$，即

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{2}$$

则称(2)式为**线性齐次方程**，并且通常称(2)式为(1)式所对应的线性齐次方程. 系数 $p(x)$，$q(x)$恒等于常数的方程称为**二阶常系数线性微分方程**.

(二) 重要定理及公式

定理 6.1(线性齐次方程解的叠加性)　若 y_1, y_2 是二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{3}$$

的两个解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 也是方程(3)的解，其中 C_1, C_2 为任意常数(实数或复数).

定理 6.2(解的结构定理)　如果 y_1, y_2 是线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的两个特解，并且对任意常数 k，$y_1(x)\neq ky_2(x)$，则 y_1, y_2 的线性组合 $C_1y_1+C_2y_2$(C_1, C_2 为任意常数)是方程的通解.

通常定理 6.2 叫做线性齐次方程解的结构定理. 根据这个定理可以把求方程(3)的通解问题化成求它的两个线性无关的特解问题.

定理 6.3　如果 y^* 是线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{4}$$

的一个特解，$Y=C_1y_1+C_2y_2$ 是其相应的齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的通解，则方程(4)的通解是

$$y=Y+y^*.$$

定理 6.4　若 y_1^*, y_2^* 分别是

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 是

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的特解.

以上四个定理是进一步讨论线性微分方程求解问题的理论基础. 下面讨论如何找出特解来构造它们的通解. 由于微分方程是很复杂的，并不是对任何一个二阶线性方程都能找到一般解法，所以我们只讨论二阶常系数线性齐次方程与具有特殊右端的二阶常系数线性非齐次方程的解法.

（三）重要方法

1. 分离变量法

对于变量可分离的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)\cdot Q(y),$$

我们分两步进行讨论：

（1）若 $Q(y)=0$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，则 $y=y_0$ 为方程的一个特解.

（2）若 $Q(y)\neq 0$，则上面方程可化成下面的形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{Q(y)}=P(x)\mathrm{d}x.$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{Q(y)}=\int P(x)\mathrm{d}x,$$

令

$$G(y)=\int\frac{\mathrm{d}y}{Q(y)},\quad H(x)=\int P(x)\mathrm{d}x,$$

从而

$$G(y)=H(x)+C$$

为方程的通解. 这种解方程的方法称为**分离变量法**.

例 1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(1+y)$ 的通解.

解 方程可分离变量为

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=2x\mathrm{d}x \quad (y\neq -1),$$

两边积分得到

$$\ln|1+y|=x^2+C_1,$$

即

$$|1+y|=\mathrm{e}^{x^2+C_1}.$$

考虑到 $y=-1$ 也是方程的解，故令 $\mathrm{e}^{C_1}=C$，则原方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}-1.$$

例 2 求微分方程 $y'\cdot y+x=0$ 满足 $y|_{x=3}=4$ 的特解.

解 方程可分离变量为

$$x\mathrm{d}x=-y\mathrm{d}y,$$

两边积分得到

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}y^2+C_1,$$

令 $C=2C_1$，则原方程的通解为

$$x^2+y^2=C.$$

将初值条件 $y|_{x=3}=4$ 代入 $x^2+y^2=C$ 中，得到 $C=25$，所以原方程的特解为

$$x^2+y^2=25.$$

在例 2 中，由关系式 $x^2+y^2=25$ 所确定的隐函数是方程 $y'\cdot y+x=0$ 的解. 一般情况下，我们把这种确定方程解的关系式 $\Phi(x,y)=0$ 称为方程的**隐式解**. 为了方便起见，在以后的讨论中，我们不把解和隐式解加以区别，而把它们统称为方程的解.

2. 一阶线性齐次微分方程的解法

设

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0. \tag{5}$$

对(5)式分离变量后得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x.$$

对上式两边积分

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

即 $$|y|=\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

亦即 $$y=\pm\,\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

又因为 $y=0$ 也是解，所以一阶齐次微分方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad(C\text{ 为任意常数}).\tag{6}$$

例 3 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=0$ 的通解.

解 这是一个一阶线性齐次微分方程. 可见 $P(x)=3$，代入上面的公式(6)即得通解

$$y=C\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{-3x}\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

3. 一阶线性非齐次微分方程的解法

设

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)\quad(Q(x)\not\equiv 0).\tag{7}$$

显然 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$不可能是非齐次微分方程(7)的通解. 考虑用 $C(x)$代替 C 有可能是方程(7)的解. 这种将常数变为待定函数的方法通常称为**常数变易法**，这种方法不但适用于一阶线性微分方程，而且也适用于高阶线性微分方程和线性微分方程组.

这里我们不再仔细地讨论它，只给出非齐次微分方程(7)的通解：

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].\tag{8}$$

例 4 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=\mathrm{e}^{-3x}$满足 $y|_{x=1}=0$ 的特解.

解 这是一个一阶线性非齐次微分方程，可见 $P(x)=3$，

$Q(x)=\mathrm{e}^{-3x}$. 代入公式(8)有

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\ &= \mathrm{e}^{-3x}\left[\int \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x + C\right] \\ &= \mathrm{e}^{-3x}(x + C). \end{aligned}$$

方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-3x}(x + C).$$

将初值条件 $y|_{x=1}=0$ 代入 $y=\mathrm{e}^{-3x}(x+C)$ 中，得到 $C=-1$. 所以原方程的特解为

$$y = \mathrm{e}^{-3x}(x - 1).$$

例 5 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\cos x$ 的通解.

解 这是一个一阶线性非齐次微分方程. 将方程两边同除以 x 得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x},$$

这里将 $P(x)=\dfrac{1}{x}$, $Q(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ 代入公式(8)，有

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{\cos x}{x}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\ln|x|}\left[\int \frac{\cos x}{x}\mathrm{e}^{\ln|x|}\mathrm{d}x + C\right] \\ &= \frac{1}{|x|}\left[\int \frac{\cos x}{x} \cdot |x|\mathrm{d}x + C\right]. \end{aligned}$$

当 $x>0$ 时，

$$y = \frac{1}{x}\left[\int \cos x\mathrm{d}x + C\right] = \frac{1}{x}(\sin x + C);$$

当 $x<0$ 时，

$$y = -\frac{1}{x}\left[\int -\cos x\mathrm{d}x + C\right] = \frac{1}{x}(\sin x + C).$$

所以原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(\sin x+C).$$

不难看出，常数变易法实际上是通过令

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

把方程(7)变形后，再利用分离变量法求解.

4. 二阶常系数线性齐次方程的解法——特征方程法

对于二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 来说，只要找出它的特征方程的根，我们就可以直接写出它的通解. 现将它们的关系列表如下：

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
$\lambda_1\neq\lambda_2$ 两个不等实根	$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 重根	$(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$
$\alpha\pm i\beta$ 共轭复根	$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

5. 二阶常系数线性非齐次方程的解法——待定系数法

对于二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 来说，当自由项 $f(x)$ 为以下函数乘积的形式时，即

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x]$$

时(其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式，$Q_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式)，可分两种情况给出特解的形式：

(1) 如果 $\alpha+i\beta$ 不是相应的齐次方程的特征根，那么非齐次方程的特解形如

$$y^*=e^{\alpha x}[W_k(x)\cos\beta x+V_k(x)\sin\beta x],$$

其中 $W_k(x)$，$V_k(x)$ 都是 x 的 k 次多项式，$k=\max\{m,n\}$；

(2) 如果 $\alpha+i\beta$ 是相应的齐次方程的特征根，那么非齐次方程的特解形如

$$y^* = xe^{\alpha x}[W_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x],$$

其中 $W_k(x)$,$V_k(x)$都是 x 的 k 次多项式,$k=\max\{m,n\}$.

6. 可降阶方程的初等变换法

二阶和二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**. 对于一般的高阶微分方程来说,能够用初等积分法求解的方程是很少的. 某些高阶方程可以通过初等变换的方法降低它们的阶数来求解,这些方程称为**可降阶方程**.

二阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

或

$$y'' = f(x,y,y').$$

下面介绍的三种二阶的可降阶方程,它们都可通过变换

$$y' = p$$

化为一阶微分方程来求解.

(1) $y''=f(x)$型

这类方程的特点是不显含 y 和 y'. 令 $y'=p$,原方程可以化为

$$y' = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1,$$

两边积分,便得到通解

$$y = \int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1x + C_2,$$

改写为

$$y = \int\mathrm{d}x\int f(x)\mathrm{d}x + C_1x + C_2.$$

例 6 求微分方程 $y''=x+\sin x$ 的通解.

解 将原方程两边对 x 积分,得到

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1,$$

再积分便得到原方程的通解

$$y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2.$$

(2) $y''=f(x,y')$ 型

这类方程的特点是不显含 y. 令 $y'=p$,则 $y''=p'$. 将 y',y''代入原方程便得到一阶方程

$$p' = f(x,p).$$

设其通解为

$$p = \varphi(x,C_1),$$

即

$$y' = \varphi(x,C_1).$$

两边积分便得到原方程的通解

$$y = \int \varphi(x,C_1)\mathrm{d}x + C_2.$$

例 7 求微分方程 $y''=y'+x$ 的通解.

解 令 $y'=p$,则 $y''=p'$. 原方程化为一阶线性非齐次方程

$$p' - p = x,$$

这里 $P(x)=-1$,$Q(x)=x$,代入公式(8)即得

$$p = C_1 \mathrm{e}^x - (x+1),$$

即

$$y' = C_1 \mathrm{e}^x - (x+1).$$

再积分,便得到原方程的通解

$$y = C_1 \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2.$$

(3) $y''=f(y,y')$ 型

这类方程的特点是不显含 x. 令 $y'=p$,并考虑把 y 看作自变量,有

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p.$$

这样,原方程便可以化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p = f(y,p).$$

设其通解为

$$p = \varphi(y,C_1),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1).$$

分离变量后，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)} = \mathrm{d}x,$$

两边积分便得到原方程的通解

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)} + C_2.$$

例 8 求微分方程 $yy''=1-(y')^2$ 的通解.

解 令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程可以化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 1.$$

将上式分离变量后，得到

$$\frac{p\mathrm{d}p}{1-p^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

解得

$$y^2(1-p^2)=C_1.$$

从而

$$p=\pm\frac{1}{y}\sqrt{y^2-C_1},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{1}{y}\sqrt{y^2-C_1}.$$

将上式分离变量后，得到

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-C_1}} = \pm\,\mathrm{d}x,$$

解得

$$\sqrt{y^2-C_1}=\pm(x+C_2).$$

所以原方程的通解为

$$y^2 = (x + C_2)^2 + C_1.$$

二、习题

(一) 选择题

1. 微分方程 $3y^2\mathrm{d}y+3x^2\mathrm{d}x=0$ 的阶是(　　).

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 0.

2. 微分方程 $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$ 的阶数是(　　).

(A) 3；　(B) 4；　(C) 5；　(D) 2.

3. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x}=0$ 满足 $y|_{x=3}=4$ 的特解是(　　).

(A) $x^2+y^2=25$；　(B) $3x+4y=C$；

(C) $y^2+x^2=C$；　(D) $y^2-x^2=7$.

4. 微分方程 $y\ln x\mathrm{d}x=x\ln y\mathrm{d}y$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解是(　　).

(A) $\ln^2x+\ln^2y=0$；　(B) $\ln^2x+\ln^2y=1$；

(C) $\ln^2x=\ln^2y$；　(D) $\ln^2x=\ln^2y+1$.

5. 方程 $y'-2y=0$ 的通解是(　　).

(A) $y=\sin x$；　(B) $y=4\mathrm{e}^{2x}$；

(C) $y=C\mathrm{e}^{2x}$；　(D) $y=\mathrm{e}^x$.

6. 下列函数中,哪个是微分方程 $\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x=0$ 的解(　　).

(A) $y=2x$；　(B) $y=x^2$；

(C) $y=-2x$；　(D) $y=-x$.

7. 方程 $xy'+y=3$ 的通解是(　　).

(A) $y=\frac{C}{x}+3$；　(B) $y=\frac{3}{x}+C$；

(C) $y=-\frac{C}{x}-3$；　(D) $y=\frac{C}{x}-3$.

8. 微分方程 $y'-y=1$ 的通解是(　　).

(A) $y=C\mathrm{e}^x$；　(B) $y=C\mathrm{e}^x+1$；

(C) $y=Ce^{x}-1$;　　　　(D) $y=(C+1)e^{x}$.

9. 微分方程 $y'+y=0$ 的解为(　　).

(A) e^{x};　(B) e^{-x};　(C) $e^{x}+e^{-x}$;　(D) $-e^{x}$.

10. 微分方程 $y'=3y^{\frac{2}{3}}$的一个特解是(　　).

(A) $y=x^{3}+1$;　　　　(B) $y=(x+2)^{3}$;

(C) $y=(x+C)^{2}$;　　　　(D) $y=C(x+1)^{3}$.

11. $\begin{cases} xy'+y=3, \\ y|_{x=1}=0 \end{cases}$ 的解是(　　).

(A) $y=3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$;　　　　(B) $y=3(1-x)$;

(C) $y=1-\dfrac{1}{x}$;　　　　(D) $y=1-x$.

12. 函数 $y=\cos x$ 是下列哪个微分方程的解(　　).

(A) $y'+y=0$;　　　　(B) $y'+2y=0$;

(C) $y''+y=0$;　　　　(D) $y''+y=\cos x$.

13. $y'=y$ 满足 $y|_{x=0}=2$ 的特解是(　　).

(A) $y=e^{x}+1$;　　　　(B) $y=2e^{x}$;

(C) $y=2e^{\frac{x}{2}}$;　　　　(D) $y=3e^{x}$.

14. 微分方程 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x(x^{2}+1)}$的通解为(　　).

(A) $\arctan x+C$;　　　　(B) $\dfrac{1}{x}(\arctan x+C)$;

(C) $\dfrac{1}{x}\arctan x+C$;　　　　(D) $\arctan x+\dfrac{C}{x}$.

15. 下列函数中,(　　)是微分方程 $y''-7y'+12y=0$ 的解.

(A) $y=x^{3}$;　(B) $y=x^{2}$;　(C) $y=e^{3x}$;　(D) $y=e^{2x}$.

16. $y''=e^{-x}$的通解为 $y=$(　　).

(A) $-e^{-x}$;　　　　(B) e^{-x};

(C) $e^{-x}+C_{1}x+C_{2}$;　　　　(D) $-e^{-x}+C_{1}x+C_{2}$.

（二）解答题

1. 讨论下列方程的阶数，指出是否为线性方程，在(4)，(5)两题中验证已知函数是方程的解.

(1) $x^2y'+y+1=0$；

(2) $\dfrac{d^3S}{dt^3}-2\cos t\dfrac{d^2S}{dt^2}+\sin S=0$；

(3) $y''+y\cdot y'=0$；

(4) $y=xy'+\dfrac{2}{3}(y')^{\frac{3}{2}}$，已知函数：$y=Cx+\dfrac{2}{3}(C)^{\frac{3}{2}}$（$C$ 是任意常数）；

(5) $\sin^2 y dx+(x\sin 2y+2y)dy=0$，已知函数：$x\sin^2 y+y^2=C$（$C$ 是任意常数）.

2. 在题(1)—(20)中，求各微分方程的通解或满足初值条件的特解：

(1) $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln y$；

(2) $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$；

(3) $xydx+(x^2+1)dy=0$；

(4) $\dfrac{dx}{y}+\dfrac{4dy}{x}=0, y|_{x=4}=2$；

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$；

(6) $y-x\dfrac{dy}{dx}=4\left(y^2+\dfrac{dy}{dx}\right)$；

(7) $(1+e^x)y\dfrac{dy}{dx}=e^x, y|_{x=1}=1$；

(8) $\sin y\cos x dy=\cos y\sin x dx, y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；

(9) $x\dfrac{dy}{dx}-x\sin\dfrac{y}{x}-y=0$；

(10) $(x+y)dy=(y-x)dx$；

(11) $\dfrac{dy}{dx}+2y=4x$；

(12) $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$；

(13) $\dfrac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x, y|_{x=0}=0$；

(14) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=2x$；

(15) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$；

(16) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=x^2e^x, y|_{x=1}=0$；

(17) $y''=1-\cos x$；　　　(18) $y'''=xe^x$；

(19) $y''=1+(y')^2$；　　　(20) $y''-4y'-x=0$.

3. 在题(1)—(16)中，求各微分方程的通解或满足初值条件的特解：

(1) $y''-3y'=0$；　　　(2) $y''-y'-2y=0$；

(3) $y''+3y'+2y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$；

(4) $y''-3y'-4y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$；

(5) $4y''-20y'+25y=0$；　　　(6) $y''-6y'+9y=0$；

(7) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$；

(8) $y''+y=0$；　　　(9) $y''+6y'+13y=0$；

(10) $4y''-8y'+5y=0$；

(11) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$；

(12) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$；

(13) $2y''+y'-y=2e^x$；　　　(14) $y''-7y'+6y=\sin x$；

(15) $y''-8y'+16y=x+e^{4x}$；

(16) $y''+y=-\sin 2x, y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$.

三、分析及解答

(一) 选择题

1. 答案是：A.

分析　由微分方程阶的定义，可知

$$3y^2dy+3x^2dx=0$$

是一阶的.

故选择 A.

2. 答案是：D.

分析　易见方程中出现的 y 的导数的最高阶数是 2 阶.

故选择 D.

3. 答案是：A.

分析 因(B)、(C)中含有常数 C. 故不是.

将 $x^2+y^2=25$ 两边求导得到

$$2x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x}=0.$$

故选择 A.

4. 答案是：C.

分析 由初值条件 $y|_{x=1}=1$ 可知. (B),(D)不是方程的特解. 而由方程

$$y\ln x\mathrm{d}x=x\ln y\mathrm{d}y$$

看出 x 与 y 具有对称性.

故选择 C.

5. 答案是：C.

分析 易见 $y=C\mathrm{e}^{2x}$是通解(其余都没有常数 C).

故选择 C.

6. 答案是：B.

分析 将 $y=x^2$ 代入方程，有

$$\mathrm{d}x^2-2x\mathrm{d}x=0.$$

故选择 B.

7. 答案是：A.

分析 方程化为：$y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{x}$，这是一阶线性非齐次方程，由公式有

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{3}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x}(3x + C) = \frac{C}{x} + 3.$$

故选择 A.

8. 答案是：C.

分析 令 $C=0$，将 $y=0, y=1, y=-1, y=e^x$ 代入方程验证，只有 $y=-1$ 满足.

故选择 C.

9. 答案是：B.

分析 由 $y'+y=0$，即

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad \frac{dy}{y} = -dx.$$

两边积分 $\ln y = -x + C_1$，

即 $y = e^{-x+C_1} = Ce^{-x}$.

令 $C=1$，得到解 e^{-x}.

故选择 B.

10. 答案是：B.

分析 易见(C)，(D)不是特解. 将 $y=(x+2)^3$ 求导，得到

$$y' = 3(x+2)^2,$$

代入方程

$$3(x+2)^2 = 3[(x+2)^3]^{\frac{2}{3}}.$$

故选择 B.

11. 答案是：A.

分析 将方程化成

$$\frac{dy}{3-y} = \frac{1}{x}dx,$$

两边积分，得到

$$-\ln(3-y) = \ln x + C_1,$$

即 $\frac{1}{3-y} = Cx$. 由 $y|_{x=1}=0$，得到 $C=\frac{1}{3}$. 于是方程的特解为

$$y = 3\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

故选择 A.

12. 答案是：C.

分析 由于 $y' = -\sin x, y'' = -\cos x$，有

$$y'' + y = 0.$$

故选择 C.

13. 答案是：B.

分析 $y = 2e^x$ 满足 $y' = 2e^x = y$，且 $y|_{x=0} = 2e^0 = 2$，所以特解是(B). 而

$y = e^x + 1$ 不满足方程 $y' = y$；

$y = 2e^{\frac{x}{2}}, y' = e^{\frac{x}{2}} \neq y$；

$y = 3e^x, y' = 3e^x = y$，但是，$y|_{x=0} = 3 \neq 2$.

故选择 B.

14. 答案是：B.

分析 这是一个一阶线性非齐次微分方程，根据公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

的特征，并且：

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

故选择 B.

15. 答案是：C.

分析 由

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

得到

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4,$$

因此 $y = e^{3x}$ 是方程的一个解.

故选择 C.

16. 答案是：C.

分析 易见(A)、(B)不是其通解，由

$$y_1 = \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2 = -\mathrm{e}^{-x}$$

求得

$$y_1'' = \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2'' = -\mathrm{e}^{-x},$$

因此 $y=\mathrm{e}^{-x}+C_1x+C_2$ 为方程通解.

故选择 C.

(二) 解答题

1. **答** (1) 一阶，线性微分方程；

(2) 三阶，非线性微分方程；

(3) 二阶，非线性微分方程；

(4) 一阶，非线性微分方程；因为

$$y = Cx + \frac{2}{3}(C)^{\frac{3}{2}},$$

$$y' = C$$

代人所给方程后变成为一个恒等式：

$$y = Cx + \frac{2}{3}(C)^{\frac{3}{2}} \equiv xC + \frac{2}{3}(C)^{\frac{3}{2}} = xy' + \frac{2}{3}(y')^{\frac{3}{2}},$$

因此函数 $y=Cx+\frac{2}{3}(C)^{\frac{3}{2}}$ 是所给方程的解.

(5) 当 y 为自变量时，方程为一阶线性的；当 x 为自变量时，方程为一阶非线性的. 对函数

$$x\sin^2 y + y^2 = C$$

两边同时求导，得到

$$\sin^2 y + x2\sin y(\cos y) \cdot y'_x + 2y \cdot y'_x = 0,$$

即

$$\sin^2 y\mathrm{d}x + (x\sin 2y + 2y)\mathrm{d}y = 0.$$

因此，函数 $x\sin^2 y+y^2=C$ 是所给方程的解.

2. **解** (1) 这是一个变量可分离的方程. 变量分离后得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得到

$$\ln\ln y=\ln x+C_1,$$

即

$$\ln y=\mathrm{e}^{C_1}x.$$

令 $C=\mathrm{e}^{C_1}$，得到所给方程的通解：

$$y=\mathrm{e}^{Cx}.$$

（2）这是一个变量可分离的方程. 变量分离后得到

$$\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$$

得到

$$-\mathrm{e}^{-y}+C=\mathrm{e}^{x},$$

因此所给方程的通解为：

$$\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-y}=C.$$

（3）这是一个变量可分离的方程. 变量分离后得到

$$\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y,$$

两边积分

$$\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

得到

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=-\ln y+C_1,$$

即

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y}e^{C_1}.$$

令 $C=e^{C_1}$,得到所给方程的通解:

$$y\sqrt{x^2+1}=C.$$

(4) 这是一个变量可分离的方程.变量分离后得到

$$x\mathrm{d}x=-4y\mathrm{d}y,$$

两边积分

$$\int x\mathrm{d}x=-4\int y\mathrm{d}y$$

得到

$$\frac{1}{2}x^2=-2y^2+C,$$

即

$$\frac{1}{2}x^2+2y^2=C.$$

将初值条件 $y|_{x=4}=2$ 代入:

$$\frac{1}{2}\cdot 4^2+2\cdot 2^2=C,$$

得到 $C=16$.所给方程满足初值条件的特解为

$$x^2+4y^2=32.$$

(5) 这是一个变量可分离的方程.变量分离后得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}},$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$$

得到

$$\arcsin x=\arcsin y+C,$$

即

$$\arcsin x - \arcsin y = C.$$

(6) 原方程可以写成

$$y(1-4y) = (4+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

变量分离后得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{4+x} = \frac{\mathrm{d}y}{y(1-4y)},$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}x}{4+x} = \left(\frac{4}{4y-1} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y.$$

两边积分得到

$$-\ln|x+4| = \ln|4y-1| - \ln|y| + C_1,$$

即

$$\ln|y| = \ln|x+4| + \ln|4y-1| + C_1,$$

亦即

$$y = (x+4)(4y-1)\mathrm{e}^{C_1}.$$

令 $C=\mathrm{e}^{C_1}$,得到所给方程的通解:

$$y = C(x+4)(4y-1).$$

(7) 原方程可以写成

$$y\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得到

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

将初值条件 $y|_{x=1}=1$ 代入:

$$\frac{1}{2} = \ln(1+\mathrm{e}) + C,$$

得到 $C=\frac{1}{2}-\ln(1+\mathrm{e})$. 所给方程满足初值条件的特解为

$$y^2 - 1 = 2\ln(1 + e^x) - 2\ln(1 + e).$$

(8) 原方程可以写成

$$\frac{\sin y}{\cos y}dy = \frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

两边积分得到

$$\ln|\cos y| = \ln|\cos x| + C_1,$$

即

$$\cos y = \cos x \cdot e^{C_1}.$$

令 $C=e^{C_1}$,得到方程的通解

$$\cos y = C \cdot \cos x.$$

将初值条件 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$代入:

$$\cos\frac{\pi}{4} = C \cdot \cos 0,$$

得到 $C=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 所给方程满足初值条件的特解为

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x,$$

即

$$\cos x - \sqrt{2}\cos y = 0.$$

(9) 原方程可以写成

$$\frac{dy}{dx} = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x},$$

可见这是一个齐次方程. 令$\frac{y}{x}=u$,则上面方程又可化成:

$$u + x\frac{du}{dx} = \sin u + u.$$

变量分离后得到

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sin u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得到

$$\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|=\ln|x|+C_1,$$

即

$$\tan\frac{u}{2}=\mathrm{e}^{C_1}x.$$

令 $C=\mathrm{e}^{C_1}$，得到 $\tan\frac{u}{2}=Cx$，即 $u=2\arctan Cx$，故所给方程的通解为

$$y=2x\arctan(Cx).$$

(10) 原方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

可见这是一个齐次方程. 令 $\frac{y}{x}=u$，则上面方程又可化成：

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1-u}{1+u}.$$

变量分离后得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\int\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

得到

$$\ln|x|=-\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+C_1,$$

即

$$x\sqrt{1+u^2}=e^{C_1-\arctan u}.$$

令 $C=e^{C_1}$，得到 $x\sqrt{1+u^2}=Ce^{-\arctan u}$，即 $\sqrt{x^2+x^2u^2}=Ce^{-\arctan u}$，故所给方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

(11) 这是一个 $P(x)=2$，$Q(x)=4x$ 的一阶线性非齐次方程，代入公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

得到

$$y=e^{-\int 2dx}\left[\int 4xe^{\int 2dx}dx+C\right]=e^{-2x}\left[\int 4xe^{2x}dx+C\right]$$
$$=e^{-2x}(2xe^{2x}-e^{2x}+C)=2x-1+Ce^{-2x}.$$

(12) 这是一个 $P(x)=1$，$Q(x)=e^{-x}$的一阶线性非齐次方程. 代入公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

得到

$$y=e^{-\int dx}\left[\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right]=e^{-x}\left[\int e^{-x}e^{x}dx+C\right]$$
$$=e^{-x}(x+C).$$

(13) 这是一个 $P(x)=-\tan x$，$Q(x)=\sec x$ 的一阶线性非齐次方程. 代入公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

得到

$$y=e^{\int \tan x dx}\left[\int \sec x\cdot e^{-\int \tan x dx}dx+C\right]$$
$$=e^{-\ln\cos x}\left[\int \sec x\cdot e^{\ln\cos x}dx+C\right]$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left(\int \sec x \cdot \cos x \mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{\cos x}(x + C).$$

将初值条件 $y|_{x=0}=0$ 代入：

$$0 = \frac{1}{\cos 0}(0 + C),$$

得到 $C=0$. 所给方程满足初值条件的特解为

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

(14) 原方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2\frac{y}{x} = 2,$$

这是一个 $P(x)=-\frac{2}{x}$, $Q(x)=2$ 的一阶线性非齐次方程. 由通解公式得到

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int 2\mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = x^2\left(\int \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= x^2\left(-\frac{2}{x} + C\right) = Cx^2 - 2x.$$

(15) 这是一个 $P(x)=2x$, $Q(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$ 的一阶线性非齐次方程. 由通解公式得到

$$y = \mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left[\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-x^2}\left[\int x\mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-x^2}\left(\int x\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

(16) 这是一个 $P(x)=-\frac{2}{x}$, $Q(x)=x^2\mathrm{e}^x$ 的一阶线性非齐次方程. 由通解公式得到

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int x^2\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

$$= e^{\ln x^2}\left[\int x^2 e^x \cdot e^{-\ln x^2} dx + C\right]$$
$$= x^2\left(\int x^2 e^x \frac{1}{x^2} dx + C\right)$$
$$= x^2(e^x + C).$$

将初值条件 $y|_{x=1}=0$ 代入：

$$0 = 1(e^1 + C),$$

得到 $C=-e$，所给方程满足初值条件的特解为

$$y = x^2(e^x - e).$$

（17）这是一个可降阶方程. 方程两边对 x 积分，得到

$$y' = \int(1-\cos x)dx = x - \sin x + C_1.$$

再积分得到所给方程的通解

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \cos x + C_1 x + C_2.$$

（18）这是一个可降阶方程. 方程两边对 x 积分，得到

$$y'' = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C_1,$$

再积分得到

$$y' = x e^x - 2e^x + C_1 x + C_2.$$

于是所给方程的通解为

$$y = x e^x - 3e^x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

（19）这是一个可降阶方程. 由于方程中不含有 y，可令 $y'=p$，则 $y''=p'$，于是原方程化成

$$\frac{dp}{dx} = 1 + p^2.$$

变量分离后得到

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx,$$

两边积分得到

$$\arctan p = x + C_1,$$

即

$$p = \tan(x + C_1),$$

亦即

$$p = \tan(x + C_1).$$

两边积分便得到所给方程的通解

$$y = - \ln\cos(x + C_1) + C_2.$$

(20) 这是一个可降阶方程. 由于方程中不含有 y,可令 $y' = p$,则 $y''=p'$,于是原方程化成

$$p' - 4p = x.$$

于见它是一个一阶线性非齐次方程,由通解公式得到

$$\begin{aligned} p &= e^{\int 4dx}\left[\int x e^{-\int 4dx} dx + C_1\right] = e^{4x}\left(\int x e^{-4x} dx + C_1\right) \\ &= e^{4x}\left[- \frac{1}{4}(x e^{-4x}) - \frac{1}{16} e^{-4x} + C_1\right] \\ &= - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16} + C_1 e^{4x}, \end{aligned}$$

即 $y' = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{16} + C_1 e^{4x}$. 再积分便得到所给方程的通解:

$$y = - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{4}C_1 e^{4x} + C_2.$$

3. **解** (1) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

解之得到 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$.

由于它有两个不等的实根 0 和 3,故所给方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

(2) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

解之得到 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$.

由于它有两个不等的实根 2 和 -1,故所给方程的通解为

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

(3) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

解之得到 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$.

由于它有两个不等的实根 -1 和 -2,故所给方程的通解为

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

将初值条件 $y|_{x=0}=0$ 和 $y'|_{x=0}=1$ 分别代入到

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} \quad 和 \quad y' = -C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x}$$

之中,得到 $C_1=1,C_2=-1$,所给方程满足初值条件的特解为

$$y = e^{-x} - e^{-2x}.$$

(4) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

解之得到 $\lambda_1=-1,\lambda_2=4$.

由于它有两个不等的实根 -1 和 4,故所给方程的通解为

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x}.$$

将初值条件 $y|_{x=0}=0$ 和 $y'|_{x=0}=-5$ 分别代入到

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} \quad 和 \quad y' = -C_1e^{-x} + 4C_2e^{4x}$$

之中,得到 $C_1=1,C_2=-1$,故所给方程满足初值条件的特解为

$$y = e^{-x} - e^{4x}.$$

(5) 其相应的特征方程为

$$4\lambda^2 - 20\lambda + 25 = 0,$$

解之得到 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{5}{2}$.

由于它有两个相同的实根(即重根),故所给方程的通解为

$$y = e^{\frac{5}{2}x}(C_1 + C_2x).$$

(6) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

解之得到 $\lambda_1=\lambda_2=3$.

由于它有两个相同的实根(即重根),故所给方程的通解为

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2x).$$

(7) 其相应的特征方程为

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0,$$

解之得到 $\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$.

由于它有两个相同的实根(即重根),故所给方程的通解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2x),$$

将初值条件 $y|_{x=0}=2$ 和 $y'|_{x=0}=0$ 分别代入到

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2x)$$

和

$$y' = \left(-\frac{1}{2}C_1 + C_2\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}C_2xe^{-\frac{x}{2}}$$

之中,得到 $C_1=2,C_2=1$,故所给方程满足初值条件的特解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(2 + x).$$

(8) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

解之得到 $\lambda=0\pm i$.

由于它有一对共轭复根 $0\pm i$,故所给方程的通解为

$$y = e^{0x}(C_1\cos x + C_2\sin x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

(9) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0,$$

解之得到 $\lambda=-3\pm 2i$.

由于它有一对共轭复根 $-3\pm 2i$,故所给方程的通解为

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

(10) 其相应的特征方程为

$$4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0,$$

解之得到 $\lambda = 1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

由于它有一对共轭复根 $1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}$，故所给方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^x\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right).$$

(11) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0,$$

解之得到 $\lambda = -2 \pm 5\mathrm{i}$.

由于它有一对共轭复根 $-2 \pm 5\mathrm{i}$，故所给方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x).$$

将初值条件 $y|_{x=0} = 0$ 和 $y'|_{x=0} = 15$ 分别代入到

$$y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$$

和

$$\begin{aligned} y' &= -2\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) \\ &\quad + \mathrm{e}^{-2x}(-5C_1\sin 5x + 5C_2\cos 5x) \\ &= \mathrm{e}^{-2x}[(-2C_1 + 5C_2)\cos 5x - (5C_1 + 2C_2)\sin 5x] \end{aligned}$$

之中，得到 $C_1 = 0, C_2 = 3$. 故所给方程满足初值条件的特解为

$$y = 3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x.$$

(12) 其相应的特征方程为

$$2\lambda^2 + 5\lambda = 0,$$

解之得到 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{5}{2}$，故相应的齐次方程通解为

$$y_1 = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}.$$

由于 0 是相应齐次方程的单根，故设原方程的特解为

$$y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$$

代入原方程，比较系数得到 $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{3}{5}, C = \frac{7}{25}$.

因此原方程的通解为：

$$y=y_1+y^*=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

(13) 其相应特征方程为

$$2\lambda^2+\lambda-1=0,$$

解之得到 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\frac{1}{2}$,故相应的齐次方程通解为

$$y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}.$$

由于 1 不是相应的齐次方程的特征根,故设原方程的特解为

$$y^*=Ae^x,$$

代入原方程,比较系数得到 $A=1$.

因此,原方程的通解为

$$y=y_1+y^*=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x.$$

(14) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2-7\lambda+6=0,$$

解之得到 $\lambda_1=1,\lambda_2=6$,故相应的齐次方程的通解为

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{6x}.$$

由于 $0+\mathrm{i}$ 不是相应的齐次方程的特征根,故设原方程的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入原方程,比较系数得到 $A=\frac{7}{74},B=\frac{5}{74}$.

因此,原方程的通解为

$$y=y_1+y^*=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{7}{74}\cos x+\frac{5}{74}\sin x.$$

(15) 其相应的特征方程为

$$\lambda^2-8\lambda+16=0,$$

解之得到 $\lambda_1=\lambda_2=4$,故相应的齐次方程的通解为

$$y_1=e^{4x}(C_1+C_2x).$$

这里要分别求出 $y''-8y'+16y=x$ 与 $y''-8y'+16y=e^{4x}$ 特解.

由于 0 不是相应的齐次方程的特征根，因此

$$y''-8y'+16y=x$$

的特解为

$$y_1^*=A_1x+B_1y,$$

代入方程，比较系数得到 $A_1=\frac{1}{16}, B_1=\frac{1}{32}$.

又由于 4 是相应的齐次方程的重根，因此

$$y''-8y'+16y=e^{4x}$$

的特解为

$$y_2^*=A_2x^2e^{4x},$$

代入方程，比较系数得到 $A_2=\frac{1}{2}$.

因此，原方程的通解为

$$y=y_1+y_1^*+y_2^*=e^{4x}\left(\frac{x^2}{2}+C_1+C_2x\right)+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}.$$

(16) 其相应特征方程为

$$x^2+1=0,$$

解之得到 $\lambda=0\pm i$，故相应的齐次方程的通解为

$$y_1=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

由于 $0+2i$ 不是相应齐次方程的特征根，故设其特解为

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

代入原方程，比较系数得到 $A=0, B=\frac{1}{3}$.

因此原方程的通解为

$$y=y_1+y^*=\frac{1}{3}\sin 2x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

将初值条件 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$ 代入通解之中得到

$$C_1 = -1, \quad C_2 = -\frac{1}{3}.$$

因此,所给方程满足初值条件的特解为

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x - \cos x - \frac{1}{3}\sin x.$$

第七章　无穷级数

一、内容提要

（一）重要概念及性质

1. 无穷级数

定义 7.1　设给定序列$\{y_n\}$：$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$. 我们把形如

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots \tag{1}$$

的式子称为一个**无穷级数**，简称为**级数**，记作$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. (1) 式中的每一个元素称为**级数的项**，并称第 n 项 y_n 为级数的**一般项**（或**通项**）.

2. 数项级数

定义 7.2　若级数的每一项都是常数，则称这种级数为**数项级数**，记作$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

数项级数的几个简单性质：

性质 1　设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是收敛的，其和为 S，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$也是收敛的，其和为 cS，即对收敛的级数有

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

性质 2　设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是收敛的，其和分别为 A 与 B，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也是收敛的，且其和为 $A \pm B$.

性质 3 对收敛级数加括号后所组成的新级数仍然收敛于原级数的和. 反之不真.

推论 若加括号后所成的新级数发散,则原级数发散.

性质 4 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

推论 若级数的一般项 u_n 不趋向零(包括 u_n 没有极限或虽有极限但不为 0),则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

3. 函数项级数

若级数的每一项都是函数,则称这种级数为**函数项级数**,记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

4. 前 n 项和数列

对于给定的一个数项级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{2}$$

我们用 S_n 表示其前 n 项的和,即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

于是,令 $n=1,2,\cdots$ 就得到一个数列 $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots,$$

称之为级数(2)的**前 n 项和数列**(或**部分和数列**).

5. 级数的和

定义 7.3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限存在,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是**收敛的**，并称S为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = S.$$

否则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是**发散的**，发散的级数没有和.

当级数发散时，(2)式只是一种形式.

6. 正项级数

定义 7.4 给定一个级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果它的每一项都是非负的，即

$$u_n \geqslant 0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**正项级数**.

7. 交错级数

定义 7.5 给定一个级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果它的各项是正负相间的，即

$$u_n = (-1)^{n+1}a_n \quad (a_n > 0; n = 1,2,\cdots),$$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$为**交错级数**.

8. 任意项级数

所谓任意项级数是指级数的各项可以随意地取正数、负数或零.

9. 绝对收敛与条件收敛

定义 7.6 若任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的各项取绝对值所成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**绝对收敛的**；若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**条件收敛的**.

10. 幂级数

定义 7.7 形如

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

的级数称为**幂级数**，其中 x 是自变量，x_0 与 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 都是常数. 经过变换 $y=x-x_0$ 后，上面的级数就可化成下面的形式：

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n + \cdots.$$

因此，不失一般性，我们以后只讨论下面形式的幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots. \tag{3}$$

11. 幂级数的收敛半径和收敛区间

对于任意幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 都存在着一个 $R\geqslant 0$：

(1) 若 $R=0$，幂级数仅在点 $x=0$ 处收敛，而当 $x\neq 0$ 时，幂级数发散.

(2) 若 $R=+\infty$，幂级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛；

(3) 若 $0<R<+\infty$，当 $|x|<R$ 时幂级数收敛，当 $|x|>R$ 时幂级数发散.（当 $|x|=R$ 时可能收敛，也可能发散.）

我们称 R 为幂级数(3)的**收敛半径**，并称 $(-R,R)$ 为**收敛区间**.

在幂级数(3)的收敛区间上的任意一点 x 处，幂级数(3)都是一个收敛的数项级数. 每一个数项级数对应有一个确定的和 S，因而在收敛区间上，幂级数(3)的和是 x 的函数 $S(x)$. 称 $S(x)$ 为幂级数(3)的**和函数**. 记作

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

和函数 $S(x)$ 的定义域就是幂级数的收敛区间. 在幂级数的收敛区间上, 可用(3)的前 $n+1$ 项和:

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

来近似地表示和函数 $S(x)$. 这时 $S(x)$ 与 $S_{n+1}(x)$ 的差

$$R_n(x) = S(x) - S_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots$$

叫做幂级数(3)的**余项**.

12. 泰勒公式与麦克劳林公式

定义 7.8 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有直至 $n+1$ 阶导数, 则对此邻域内任一 x 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(其中 ξ 在 x_0 与 x 之间).

上式称为 $f(x)$ 的**泰勒展开式或泰勒公式**.

在泰勒公式中, 当 $x_0=0$ 时, 记 $\xi=\theta x, 0<\theta<1$, 此时公式成为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

称作 $f(x)$ 的**麦克劳林公式, 或称作按 x 幂展开的泰勒公式**.

13. 泰勒级数与麦克劳林级数

定义 7.9 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数

$$f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots.$$

我们称级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的**泰勒级数**，特别当 $x_0=0$ 时，则称它为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

（二）重要定理及公式

定理 7.1（正项级数收敛准则） 正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有上界.

应用正项级数的收敛准则，可以得到下面的收敛判别法.

定理 7.2（比较判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是两个正项级数，并且 $v_n\geqslant u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，

（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

比较判别法指出，判断一个正项级数是否收敛，可以拿它与一个敛散性已知的正项级数比较，从而得出结论.

p-级数与几何级数都是非常重要的数项级数. 在判别级数的敛散性时经常要用到它们.

定理 7.3（比值判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是一个正项级数，并且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$（或 $+\infty$），

（1）若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）若 $\rho>1$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

这个判别法又称为**达朗贝尔判别法**.

定理 7.4（根值判别法） 设正项级数的一般项 u_n 的 n 次根的极限等于 l，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则

（1）当 $l<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $l>1$ 时，级数发散.

这个判别法又称为**柯西判别法**.

定理 7.5(莱布尼茨判别法) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n(a_n>0;n=1,2,\cdots)$ 满足：

(1) $a_n\geqslant a_{n+1}>0\quad(n=1,2,\cdots)$；

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 收敛，并且其和 $0\leqslant S\leqslant a$.

定理 7.6 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

根据定理 7.6，判断任意一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性，可以先判断它是否绝对收敛. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛. 这样一来，我们可以借助于正项级数的判别法来判断任意项级数的敛散性了. 但是，当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散时，不能由此推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

定理 7.7 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域 $N(0)$ 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 x 在邻域 $N(0)$ 内时，$f(x)$ 可以表示为 x 的一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 与余项 $R_n(x)$ 的和，即

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),\qquad(4)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$x_0$ 是在 0 与 x 之间.

通常把公式(4)称为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 n **阶麦克劳林公式**，而 $R_n(x)$ 的表达式称为 $f(x)$ 的**拉格朗日余项**.

定理 7.8 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域 $N(0)$ 内具有任意阶导数，则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处能够展成麦克劳林级数的充要条

件是：当 $n\to\infty$ 时，它的麦克劳林公式中的余项 $R_n(x)\to 0$.

初等函数的幂级数展开式

(1) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$$x\in(-1,1).$$

在区间端点 $x=\pm1$ 处上式右端级数是否收敛于 $f(x)$ 要视 α 的数值而定，这里我们不再讨论. 此级数通常称为二项级数.

特别地，当 α 为正整数时，对于任何 x 有：

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n,$$

这就是初等代数中的二项式公式.

(5) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1].$$

例 1 求函数 $f(x)=\sin x^2$ 的幂级数展开式.

解 把 $\sin x$ 展开式中的 x 换成 x^2，即可得 $\sin x^2$ 的展开式.

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots$$

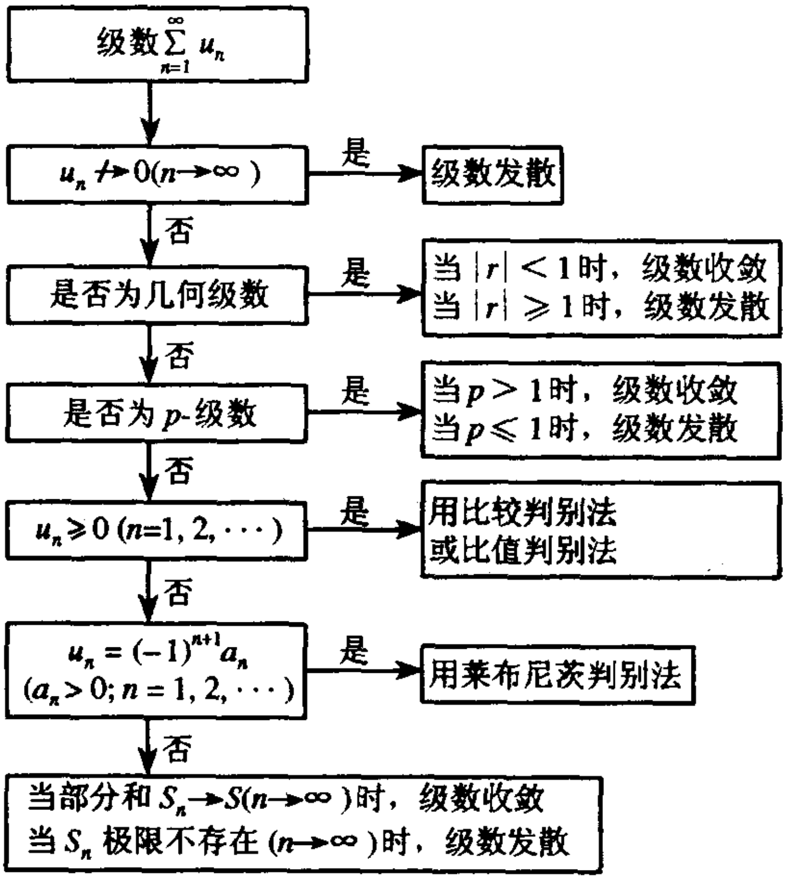
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

注意 如果直接利用公式去求展开式，那么要计算 $\sin x^2$ 的各阶导数在 0 点的值，那将是非常麻烦的.

(三) 重要方法

1. 判断数项级数的敛散性的框图

给定一个级数，如何判断它的敛散性呢？一般来说可以按下面的步骤进行判断：



2. 幂级数的基本运算

设有两个幂级数：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=f(x),\quad x\in(-A,A),$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots=g(x),\quad x\in(-B,B).$$

为了讨论方便起见，不妨假设 $A\leqslant B$. 于是在$(-A,A)$内可以进行下列运算.

(1) 加法与减法

$$\begin{aligned}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\\ \pm(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)\\ =(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+(a_2\pm b_2)x^2+\cdots\\ +(a_n\pm b_n)x^n+\cdots.\end{aligned}$$

(2) 乘法

$$\begin{aligned}&(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots)\\ &=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2\\ &\quad+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots.\end{aligned}$$

(3) 逐项微商

对于级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

在$(-A,A)$内有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'\\ &=a_1+2a_2x+3a_2x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots.\end{aligned}$$

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$有相同的收敛半径.

由(3)可以看出，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在其收敛区间$(-A,A)$内逐项微商后所得的幂级数仍在区间$(-A,A)$内收敛，这样我们把所得的结果再逐项微商，如此继续下去，可知幂级数的和函数$f(x)$在其收敛区间$(-A,A)$内有任意阶导数.

(4) 逐项积分

对于级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

在$(-A,A)$内有

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x$$

$$=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots.$$

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x$有相同的收敛半径.

例 2 求幂级数$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$的和.

解 不难看出此幂级数是对$x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$逐项微商而得到的.已知

$$x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1),$$

所以

$$\begin{aligned}&1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\\&=(x)'+(x^2)'+(x^3)'+\cdots+(x^n)'+\cdots\\&=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).\end{aligned}$$

例 3 求幂级数$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$的和.

解 这个级数是通过对$1-x^2+x^4-x^6+\cdots$逐项积分而得到的.已知

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1),$$

所以

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan x, \quad x \in (-1,1).$$

二、习题

（一）选择题

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n (a \neq 0)$（　　）.

(A) 一定发散；

(B) 可能收敛，也可能发散；

(C) $a>0$ 时收敛，$a<0$ 时发散；

(D) $|a|<1$ 时收敛，$|a|>1$ 时发散.

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是（　　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$；　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在（其中 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$）；

(D) $u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

3. 利用级数收敛时其一般项必趋于零的性质，指出下面哪个级数一定发散（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{3^n}$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n2^n}{3^n}$；　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \dfrac{1}{n^2}$；

(D) $1 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n} + \cdots$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$（　　）.

(A) 一定收敛；　　(B) 一定发散；

(C) 一定条件收敛；　　(D) 可能收敛，也可能发散.

5. 在下列级数中，发散的是（　　）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$;

(B) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$;

(C) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$;

(D) $\frac{3}{5}-\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^3}{5^3}-\frac{3^4}{5^4}+\frac{3^5}{5^5}-\cdots$.

6. 下列级数中收敛的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{q^n}$　$(|q|<1)$;　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$.

7. 下列级数中,收敛的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{5^n}$;　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$;

(C) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$;　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

8. 下列级数中,发散的级数是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{2}$;　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$;　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^3$.

9. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$发散,则有(　　).

(A) $p\leqslant 0$;　(B) $p>0$;　(C) $p\leqslant 1$;　(D) $p<1$.

10. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$(u_n>0)$,则下列级数中收敛的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+100)$;　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n-100)$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} 100u_n$；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{u_{n+1}-u_n}$.

11. 在下列级数中，条件收敛的级数是(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

12. 在下面级数中，绝对收敛的级数是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n$；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n}$.

13. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+2}x^n$ 的收敛半径 $R=$(　　).

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) $\frac{1}{2}$；　　(D) ∞.

14. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3}x^n$ 的收敛半径 $R=$(　　).

(A) 1；　　(B) 3；　　(C) $\frac{1}{3}$；　　(D) ∞.

15. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^{n+1}$ 的收敛区间是(　　).

(A) $(-1,1)$；　　(B) $[-1,1]$；

(C) $[-1,1)$；　　(D) $(-1,1]$.

16. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间是(　　).

(A) $(-1,1)$；　　(B) $[-1,1)$；

(C) $(-1,1]$；　　(D) $[-1,1]$.

(二) 解答题

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\dfrac{1}{4\ln 4}+\cdots$；

(3) $\dfrac{2}{1}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\cdots$；

(4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$.

3. 根据定义判断下列级数是否收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots$.

4. 判断下列级数是否收敛：

(1) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots$；

(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\cdots$；

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$；

(4) $1!+2!+3!+4!+\cdots$；

(5) $\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{8}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{8^2}{9^2}\right)+\left(\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{8^3}{9^3}\right)+\cdots$；

(6) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}+\cdots+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{10n}+\cdots$.

5. 判断下列正项级数是否收敛：

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$;

(3) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots$;

(4) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(5) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots$;

(6) $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots$;

(7) $\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\cdots$;

(8) $\frac{1}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots$;

(9) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot n!}{n^n}$;

(11) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots\ (a>0,b>0)$;

(12) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

(14) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

(15) $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\cdots+\frac{n}{1000n+1}+\cdots$;

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

6. 判断下列级数是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n-1}$.

7. 求下列级数的收敛区间，并讨论在端点处是否收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；　　(2) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$；　　(4) $\ln x+(\ln x)^2+(\ln x)^3+\cdots$；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

8. 利用逐项微分或逐项积分求下列各级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(|x|<1)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ $(|x|<1)$.

9. 求下列函数的幂级数展开式和它的收敛区间：

(1) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；　　(2) a^x；

(3) $\cos^2 x$；　　(4) $\ln(1+x-2x^2)$.

三、分析及解答

(一) 选择题

1. 答案是：A.

分析　根据级数性质，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}au_n$ 一定发散，否则可由

$$\sum_{n=1}^{\infty}au_n<+\infty$$

导出原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n<+\infty$.

故选择 A.

2. 答案是：C.

分析 由级数收敛定义，可知

$$\lim_{n\to\infty}S_n<+\infty$$

是其收敛的充要条件.

故选择 C.

3. 答案是：D.

分析 由于

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}\not\to 0,$$

因此级数

$$1-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\cdots$$

一定发散.

故选择 D.

4. 答案是：D.

分析 由于 $n\to\infty$时，$u_n\to 0$ 是级数收敛的必要条件，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛，也可能发散.

故选择 D.

5. 答案是：C.

分析 由于 $n\to\infty$时，

$$\sqrt[n]{0.001}\to 1\neq 0,$$

因此级数

$$0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$$

是发散的.

故选择 C.

6. 答案是：D.

分析 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

又由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

是一个公比为$\frac{2}{3}$的几何级数，因此根据级数性质，可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}<+\infty.$$

故选择 D.

7. 答案是：A.

分析 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right],$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n \text{与} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

都是公比小于 1 的几何级数，因此它们都收敛，根据级数的性质

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

也收敛.

故选择 A.

8. 答案是：A.

分析 由于当$n\to\infty$时$\sin\frac{n\pi}{2}\not\to 0$，根据$u_n\to 0(n\to\infty)$是级数收敛的必要条件，可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$$

发散.

故选择 A.

9. 答案是：A.

分析 由 p-级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

可知，当 $p \leqslant 1$ 时是发散的. 因此，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

当 $p+1 \leqslant 1$，即 $p \leqslant 0$ 时是发散的.

故选择 A.

10. 答案是：C

分析 根据级数的性质，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n < +\infty.$$

故选择 C.

11. 答案是：B.

分析 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

是一个 $p=\frac{1}{2}$ 的 p-级数，因此发散. 又由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

是一个交错级数，根据莱布尼茨判别法可知它是收敛的. 因而它是条件收敛的.

故选择 B.

12. 答案是：C.

分析 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

是 $p=\frac{3}{2}$的 p-级数，因此它是收敛的. 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

是绝对收敛的.

故选择 C.

13. 答案是：C

分析 考虑到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+3}}{\dfrac{2^n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{n+2}{n+3}=2.$$

因此，$R=\frac{1}{2}$.

故选择 C.

14. 答案是：C.

分析 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{n+4}}{\dfrac{3^n}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+4}\cdot 3=3,$$

因此 $R=\frac{1}{3}$.

故选择 C.

15. 答案是：C.

分析 先求收敛半径，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

因此 $R=1$;考虑到当 $x=-1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}<+\infty,$$

而当 $x=1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散. 因此幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}$$

的收敛域是$(-1,1)$.

故选择 C.

16. 答案是: B.

分析 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

所以 $R=1$,又因为当 $x=-1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}<+\infty,$$

而当 $x=1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ 发散},$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 收敛域为$[-1,1)$.

故选择 B.

(二) 解答题

1. **解** (1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$;

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\cdots$;

(4) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}-\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 6}}+\cdots$.

2. **解** (1) $\frac{1}{2n-1}\,(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\frac{1}{n\ln n}\,(n=2,3,\cdots)$;

(3) $(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$;

(4) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,(n=1,2,\cdots)$.

3. **解** (1) 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\\&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+1,\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)\\&=1-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

故原级数收敛,并且收敛于 $1-\sqrt{2}$.

(2) 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

并且 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}.$$

故原级数收敛，并且收敛于$\frac{1}{2}$.

4. **解** (1) 由 $u_n=\left(-\frac{8}{9}\right)^n$，可知这是一个 $r=-\frac{8}{9}$ 的几何级数. 由于 $|r|<1$，故原级数收敛.

(2) 由 $u_n=\frac{1}{3n}$，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 与调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同时敛散，故原级数发散.

(3) 由 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$，考虑到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1\neq0$，故原级数发散.

(4) 由 $u_n=n!$，考虑到 $\lim\limits_{n\to\infty}n!\neq0$，故原级数发散.

(5) 由 $u_n=\frac{1}{6^n}+\left(\frac{8}{9}\right)^n$，考虑到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ 都是 $|r|<1$ 的几何级数，故原级数收敛.

(6) 由 $u_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{10n}=\frac{3}{5n}$，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5}\frac{1}{n}$ 与调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同时敛散，故原级数发散.

5. **解** (1) 由 $u_n=\frac{1}{2n-1}\geqslant\frac{1}{2n}=v_n$，考虑到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 与调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同时敛散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 是发散的. 根据正项级数比较判别法，可知原级数是发散的.

(2) 由 $u_n=\frac{1}{n^2+1}\leqslant\frac{1}{n^2}=v_n$，考虑到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是一个 $p=2$ 的 p-级数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. 根据正项级数比较判别法，可知原级数是收敛的.

(3) 由 $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}\geqslant\frac{1+n}{1+2n+n^2}=\frac{1}{1+n}=v_n$，考虑到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$ 与调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同时敛散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$ 是发散的. 根据正项级数的

比较判别法，可知原级数是发散的.

(4) 由 $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+4)}\leqslant\frac{1}{n^2}=v_n$，考虑到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是一个 $p=2$ 的 p-级数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. 根据正项级数的比较判别法，可知原级数是收敛的.

(5) 由 $u_n=\frac{n!}{n^n},u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}<1.\end{aligned}$$

根据正项级数比值判别法，可知原级数是收敛的.

(6) 由 $u_n=\frac{n+2}{2^n},u_{n+1}=\frac{n+3}{2^{n+1}}$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+3}{n+2}=\frac{1}{2}<1.\end{aligned}$$

根据正项级数比值判别法，可知原级数是收敛的.

(7) 由 $u_n=\frac{5^n}{n!},u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{5^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0<1.\end{aligned}$$

根据正项级数比值判别法，可知原级数是收敛的.

(8) 由 $u_n=\frac{n!}{10^n},u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

根据正项级数比较判别法,可知原级数是发散的.

(9) 由 $u_n=\frac{3^n}{n\cdot 2^n}, u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1.$$

根据正项级数比较判别法,可知原级数是发散的.

(10) 由 $u_n=\frac{2n\cdot n!}{n^n}, u_{n+1}=\frac{2(n+1)\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2n\cdot n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

根据正项级数比较判别法,可知原级数是收敛的.

(11) 由 $u_n=\frac{1}{na+b}\geqslant\frac{1}{n(a+b)}=v_n\ (a>0,b>0)$,考虑到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+b)n}$ 与调和级数同时敛散,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+b)n}$ 是发散的.根据正项级数比较判别法,可知原级数是发散的.

(12) 由 $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}, u_{n+1}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$$

根据正项级数的比值判别法，可知原级数是收敛的.

(13) 由 $u_n = \frac{n+1}{n(n+2)} \geqslant \frac{n}{n(n+2)} = \frac{1}{n+2} = v_n$，考虑到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ 与调和级数同时敛散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ 是发散的. 根据正项级数比较判别法，可知原级数是发散的.

(14) 由于 $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1 \neq 0 \ (n\to\infty)$，可知原级数是发散的.

(15) 由于 $u_n = \frac{1}{1000n+1} \to \frac{1}{1000} \neq 0 \ (n\to\infty)$，可知原级数是发散的.

(16) 由 $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}, u_{n+1} = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1.$$

根据正项级数比值判别法，可知原级数是收敛的.

6. (1) 由于 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1} > 0 \ (n=1,2,\cdots)$，并且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. 根据莱布尼茨判别法可知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

是收敛的. 考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

是一个 $p=\frac{1}{2}$ 的 p-级数，因此它是发散的.

由上面的讨论可知原级数是条件收敛.

(2) 由于 $|u_n|=\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}=v_n$，考虑到 $p=2$ 的 p-级数是收敛的，并根据正项级数比较判别法，可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}\right|$$

是收敛的，因而原级数是绝对收敛.

(3) 由于 $a_n=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{\ln(n+2)}=a_{n+1}>0\ (n=1,2,\cdots)$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$. 根据莱布尼茨判别法可知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$$

是收敛的，考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}.$$

又由于

$$\frac{1}{\ln(n+1)}\geqslant\frac{1}{n+1},$$

根据正项级数的比较判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$是发散的.

由上面的讨论，可知原级数是条件收敛.

(4) 由于 $|u_n|=\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}\right|=\frac{n}{3^{n-1}}=v_n$，考虑到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot\frac{3^{n-1}}{n}=\frac{1}{3}<1.$$

根据正项级数的比值判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是收敛的，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}\right|$$

是收敛的，故原级数是绝对收敛.

7. **解** (1) 由

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n+1}{n}\to 1=l\quad(n\to\infty)$$

可知此级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{l}=1$，所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛区间为$(-1,1)$. 在 $x=1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 是发散的；在 $x=-1$ 处，级数 $\sum(-1)^n n$ 也是发散的.

(2) 由

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2n+2}\to 0=l\quad(n\to\infty)$$

可知此级数的收敛半径为 $R=+\infty$，即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!!}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内收敛.

(3) 令 $y=x-5$，首先考查幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径，由

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\to 1=l\quad(n\to\infty)$$

可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{l}=1$. 所以此级数的收敛区间为$(-1,1)$，即 $-1<y<1$. 在 $y=1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是发散的；在 $x=-1$ 处级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是收敛的.

由 $x=y+5$，可以导出 $4\leqslant x<6$. 因此幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛区间为$[4,6)$.

(4) 令 $y=\ln x$，首先考查幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n$ 的收敛半径. 由

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \to 1 = l \quad (n \to \infty)$$

可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{l}=1$，所以此级数的收敛区间为 $(-1,1)$，即 $-1<y<1$. 在 $y=1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$ 是发散的. 在 $x=-1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 也是发散的.

由 $x=e^y$ 可以导出 $\frac{1}{e}<x<e$，因此幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛区间为 $\left(\frac{1}{e},e\right)$.

(5) 令 $y=\frac{1-x}{1+x}$，首先考查幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}y^n$ 的收敛半径，由

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n+1}{2n+3} \to 1 = l \quad (n \to \infty)$$

可知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}y^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{l}=1$. 所以此级数的收敛区间为 $(-1,1)$，即 $-1<y<1$. 在 $y=1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 是发散的；在 $y=-1$ 处，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 是收敛的.

由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 可以导出 $x>0$，因此幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛区间 $(0,+\infty)$.

8. **解** (1) 由于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 是通过对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}$ 逐项积分而得到的，已知

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4} \quad (|x|<1),$$

因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \int_0^x \frac{t^4}{1-t^4}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t^4}-1\right)\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x - x \quad (|x|<1).$$

(2) 由于幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ 是通过对级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2}$ 两次逐项微商而得到的. 已知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x} \quad (|x|<1),$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1+1}{1-x}\right)''$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{1}{(1-x)^3} \quad (|x|<1).$$

9. **解** (1) 由于 $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$, 因此函数

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

其收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 由于 $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$, 考虑到 $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 将展开式中的 x 换成 $x\ln a$ 即可得到 a^x 的展开式

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!},$$

其收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

(3) 由于

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

考虑到 $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$将展开式中的 x 换成 $2x$，即可得到 $\cos 2x$ 的展开式，并且

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!},$$

其收敛区间为$(-\infty, +\infty)$.

（4）由于

$$\ln(1+x-2x^2) = \ln(1-x)(1+2x)$$

$$= \ln(1-x) + \ln(1+2x),$$

考虑到

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leqslant 1),$$

将展开式中的 x 分别换成$-x$ 和 $2x$，即可得到 $\ln(1-x)$和 $\ln(1+2x)$的展开式，并且

$$\ln(1+x-2x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}((-1)^n + 2^n)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)2^n - 1}{n}x^n.$$

由于 $\ln(1-x)$和 $\ln(1+2x)$的收敛域分别为$(-1,1]$和$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，因此 $\ln(1+x-2x^2)$的收敛域为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

ISBN 7-04-012763-6

9 787040 127638 >

定价 13.00 元