高数D 第三次作业

19. (17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1}{4}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n/4\cdot 4}=e^4$

(20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1+1}}=e^{-1}$

(21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+m}=e$ $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^m\to 1,\ \text{对任固定 } m\right)$

(22) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty$

(23) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

(24) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=+\infty$

(25) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin a}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos a+\cos(x-a)\sin a-\sin a}{x-a}=\cos a$

(26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2x}=0$

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=2$

(28) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\cos\pi=-1$ (由(25))

(29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 4x}{3\arctan 2x}=\frac{2\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4x}{3\arctan 2x}=\frac{4}{3}$

(30) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\tan 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{4x}{\tan 4x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

20. (1) $1+x\neq 0\Rightarrow$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 连续 $x=-1$ 为II类间断点.

(2) $x-1\geq 0\Rightarrow$ 在 $[1,+\infty)$ 连续

(3) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

(4) $x^2-9>0\Rightarrow$ 在 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ 连续

(5) $X\neq 0 \Rightarrow$ 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$连续　$X=0$ 工类间断点.

(6) 在$(-\infty,1),(1,+\infty)$连续　$X=1$ 工类间断点.

(7) $(-\infty,0),(0,+\infty)$上连续. $X=0$ 工类可去间断点.

(8) $X^2-3X+2\neq 0 \Rightarrow$ 在$(-\infty,1),(1,2),(2,+\infty)$连续

$X=2$, 工类间断点.　$X=1$ 工类可去间断点.

21. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1-x}{1+x}=\cos\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x}=\cos 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\frac{1}{6}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{2x}}=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{x^4+\ln(1-\frac{\pi}{4}+x)}{\sin x}=\frac{(\frac{\pi}{4})^4}{\sin\pi/4}=\frac{\pi^4\sqrt{2}}{256}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}=0$

23. (1) $f(x)=x5^x-1$　$f(1)=4>0$　$f(0)=-1<0$

在$(0,1)$内至少一根

(2) 若存在 $x_1<x_2$. $f(x_1)f(x_2)<0$　$x_1,x_2\in[a,b]$

则 在(x_1,x_2)内至少一根. 矛盾

(3) 令 $g(x)=f(x)-x=e^x-x-2$　$g(0)=-1<0$　$g(2)=e^2-4>0$

则 $g(x)$在$(0,2)$内至少有一根. 即存在 $x_0\in(0,2)$ $f(x_0)=x_0$