第一次作业 /9.19交.

1. 按照自己的理解用自己的语言给函数一个一般性定义并举例.

A: 无标准答案. 自己描述即可.

如: (·) 从数集(一般集合) 到数集的映射

(·) 从自变量到因变量的对应关系. 等.

例: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x+1$.

2. 教材: 习题一/(二)/1~16.

A: 1.(1) 不同: 定义域, $y=x^2/x$ 为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $y=x$ 为 $\mathbb{R}$

(2) 不同: 定义域, $y=\lg x^2$ 为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $y=2\lg x$ 为 $\mathbb{R}^+$.

(3) 相同: 定义域均为 $\mathbb{R}$. 且 $\forall x\in\mathbb{R}$. $|x|=\sqrt{x^2}$

关键: 一个[函数]描述了这样的数据:

<定义域> D 以及定义域上的<对应关系> f.

写作 f 只是因为 D 常常省略.

2. (1). $\mathbb{R}\setminus\{0,2\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 2\}$.

(2) $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-4>0\} = \{x\in\mathbb{R} \mid |x|>2\} = (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(3) $[-1,1)$ $\frac{1+x}{1-x}\geq 0$. (注意 $x\neq 1$)

(4) $[1,5]$ $\frac{x-3}{2}\in[-1,1]$.

(5) $\{x\geq -2, x\neq\pm 1\} = [-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty) = [-2,+\infty)\setminus\{-1,1\}$.

(6) $\{x \mid \sin x\neq\cos x\} = \{x \mid x\neq k\pi+\pi/4,\ \forall k\in\mathbb{Z}\}$.

3. $f(0)=2$. $f(1)=0$. $f(-2)=\cancel{6}\,12$, $f(-x)=x^2+3x+2$. $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2$

$f(x+\Delta x)-f(x) = \cancel{[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-2]-[x^2+3x+2]}$

$= [(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+2] - [x^2-3x+2]$

$= 2x\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x$.

4. $\varphi(t^2) = (t^2)^3+1 = t^6+1.$
$[\varphi(t)]^2 = [t^3+1]^2 = t^6+2t^3+1.$

5. $f(\frac{1}{x}) = 2\cdot\frac{1}{x^2} + 2\cdot x^2 + 5\cdot x + 5\cdot\frac{1}{x} = f(x).$
定义域均为 $\mathbb{R}\setminus\{0\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0\}$.

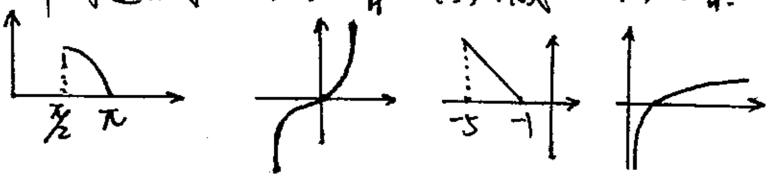
6. $|a|\geq 4$ 时 $|a-2| \geq |a|-2 \geq 2$, $|a+4| \leq |a|+4 \leq 2|a|$.
因此 $\left|\frac{a+4}{a-2}\right| = \frac{|a+4|}{|a-2|} \leq 2|a|/2 = |a|$. 最后一个不等号要保证正数.

7. 先形式计算最后代入数字会更方便.
(1). $\Delta y = (x+\Delta x) - x = \Delta x = 0.2$
(2). $\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{-0.1}{4\times 4.1} = -\frac{1}{164}.$
(3) $\Delta y = \lg(x+\Delta x) - \lg x = \lg\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \lg(1.01).$

8. $c\geq 8$ 时 $\frac{c-8}{c+3}$. $c<8$ 且 $c\neq -3$ 时 $\frac{8-c}{c+3}$. $c=-3$ 时不存在.

9. 偶函数为 (1)(4)(5). 奇函数为 (2). 非奇非偶为 (4)(6).
偶 × 奇 = 奇. (注意定义域对称)
偶 + 奇 ~~因~~ 奇或偶

10. (1) 单调递减 (2) 增 (3) 减 (4) 增. 能画图像的可以看图. 画不出来的依定义 $f(x_2)-f(x_1)$ $(x_2>x_1)$.



~~12.~~ 11. (1).(2)(4) 为周期函数. (3) 不是
周期: (1) $\frac{2k\pi}{a}$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$. (2) T. $(T\in\mathbb{R}^+)$. (4). $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$.
$\frac{2\pi}{a}$ 是最小正周期　　无最小正周期

13. $y = \frac{2x-3}{4x+2}$ 是[函数]. 意味着对应关系 $f: x \mapsto f(x) = \frac{2x-3}{4x+2}$. 反函数是 $f(x) \mapsto x$

$y = \frac{2x-3}{4x+2} \Rightarrow 2x-3 = y(4x+2) \Rightarrow (4y-2)x = -3-2y \Rightarrow x = -\frac{2y+3}{4y-2}.$

注意：函数和反函数本质上都是对应关系，别被 x、y 的符号绕晕

两套记号可选其一，不要混用：

1. $y=\frac{2x-3}{4x+2}$（暗含定义域为 $\{x \mid x\neq -\frac{1}{2}\}$，下同）的反函数为 $x=-\frac{2y+3}{4y-2}$

2. $f(x)=\frac{2x-3}{4x+2}$（或 $f(\square)=\frac{2\square-3}{4\square+2}$，$f(\star)=\frac{2\star-3}{4\star+2}$）的反函数为

$$f^{-1}(x)=-\frac{2x+3}{4x-2}.$$

12. 写漏了.

(1). $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$.

(2). $x=\sqrt{y^2-4}$　注意原函数为 $y=\sqrt[3]{x^2+4}$（$x>0$）若改定义域为（$x<0$），反函数变为 $x=-\sqrt{y^2-4}$.

(3). $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$.

(4). $x=10^y-4$.

14. $f^{-1}(x)=x-1$.　$f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-1$.　若不熟练可先写 $y=f(x)=x+1$

反解，$x=y-1$ 改写为 $f^{-1}(y)=y-1$.

因此 $f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-1$.

15. $h\cdot\pi r^2=V$. 得 $h=\frac{V}{\pi r^2}$. 函数 $h(r)=\frac{V}{\pi r^2}$.（$r>0$）.

侧表面积，$S=h\cdot 2\pi r=\frac{2V}{r}$. 函数 $S(r)=\frac{2V}{r}$（$r>0$）.

总表面积，$S_{total}=S+\pi r^2$. 函数 $S_t(r)=S(r)+\pi r^2$

$$=\frac{2V}{r}+\pi r^2\ (r>0).$$

16. $x<0$：$\cancel{p=}$ $0,1\notin(-\infty,x]$.. $M=0$

$0\leq x<1$：$1\notin(-\infty,x]$，$0\in(-\infty,x]$. $M=q$

$1\leq x$：$0,1\in(-\infty,x]$. $M=p+q=1$.

$$M(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ q & (0\leq x<1)\\ 1 & (1\leq x).\end{cases}$$