

北京大学高等数学D期中考试

2023-2024第一学期

本试卷共六道大题, 满分100分

一、 极限计算 (每题5 分,总共30分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right).$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}, (a > 1, b > 0, c > 0).$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin(2x) \arctan x}.$

二、 填空题 (每题5 分,总共20分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ e^{2ax} - e^{ax} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, 则常数 $a = \underline{\hspace{1cm}}.$
2. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)(x+n) (n \geq 2)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{1cm}}.$
3. 设可微函数 $f(x) > 0, y = \ln f(x^2)$, 则 $dy = \underline{\hspace{1cm}}.$
4. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定的隐函数. 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{1cm}}.$

三、 导数计算 (每题5 分,总共20分)

1. 设 $y = x^{n-1} \ln x$, n 是正整数. 求 $y^{(n)}.$
2. 设 $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$. 求 $y'.$
3. 求方程 $y = 1 + xe^y$ 确定隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}.$
4. 求椭圆方程 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ 在点 $(\sqrt{2} + 1, 2\sqrt{2} - 1)$ 处的切线方程和法线方程.

四、（10 分） 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

五、（10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且无零点, 利用 ε - δ 语言证明: $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上连续.

六、（10 分） 设 $x_n \leq a \leq y_n$ 对一切正整数 n 成立, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$