课程名称：高等数学（D）

期中考试试题 （2019 年 11 月 7 日） 本试卷共 6 道大题，满分 100 分

一、判断下列叙述是否正确，如果错误，说明理由（每题 2 分，总共 10 分）

1、若数列$\{x_n\}$的极限为正数，则该数列一定有无穷多项为正数。（正确）

2、如果函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 以及 $x\to-\infty$ 的时候均为常数，则 $f(x)$ 在定义域内必然是有界的。（错误）

3、在闭区间[a，b]上连续是函数$f(x)$有界的充分条件。（正确）

4、若$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)\le g(x)\le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$极限存在且相等，则 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$极限一定存在。（正确）

5、导函数的定义域和原函数是一样的。（错误）

二、选择题（每题 4 分，总共 20 分）

1. 当$x\to 0$ 时，下列哪项是$1-\cos x^2$ 的同阶无穷小（ C ）

(A) $e^{x^2}-1$ (B) $\sqrt{1+x^2}-1$ (C) $\cos x\sin x^4$ (D) $x\ln(1+x^2)$

2. 若n 为正整数，$\lambda>0$ ，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{e^{\lambda x}}=$ （ A ）

(A) 0 (B) ∞ (C) e (D) 1

3. 设$f(x)=arccos(x-1)+ln(2x-1)$,则$f(x^2)$的定义域为（ D ）

（A）$[-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}]\bigcup[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$ （B）$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

（C）$(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\bigcup(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$ （D）$[-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\bigcup(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$

4. 函数

$$f(x)=\begin{cases}2x & x<0\\ x^2 & x\ge 0\end{cases}$$

在 x = 0 处是（ A ）

（A）连续但不可导 （B）可导

（C）有极限但不连续 （D）没有极限

5. 设$f(x)=\sqrt[3]{x+1}$,则$f^{-1}(\frac{1}{x})$=（C）

(A) $(\frac{1}{x}-1)^3$ (B) $\frac{1}{x^3-1}$ (C) $(\frac{1}{x})^3-1$ (D) $(\frac{1}{x}+1)^3$

三、填空题（每题 4 分，总共 20 分）

1、 已知 $y=\arctan\sqrt{x}+\ln(\cos\sqrt{x})$ ，则 $dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\frac{1}{1+x}-\tan\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

2、 若函数 $f(x)=\begin{cases} e^{a} & x\le 0 \\ [\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _-1/2

3、 当 $x\to 0$ 以及 $x\to +\infty$ 时，$\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ 的极限分别为 $2\sqrt{3}$ 与 4.

4、 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{1+x}+ax-2b\right)=1$，则 $a+b=\quad -2$

5、设函数 $f(x)$ 是一多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, 则 $f(x)=$ $2x^3+x^2+2x$

四、计算题（每题 5 分，总共 30 分）

1、 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$

解：求此极限应该用洛必达法则，

则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ ①

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$ ②

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$ ③

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}$ ④

$=\frac{1}{2}$ ⑤

2、 计算 $\sqrt[3]{996}$ 的近似值

解：函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，其导数为 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，取 $x_0=1000$，$\Delta x=-4$，有

$$\sqrt[3]{996}=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=10+\frac{1}{300}\times(-4)\approx 9.987$$

3、 设 $a>b>0$。求曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 平行于直线 $y=x$ 的切线的方程。

解： 微分可得：

$$\frac{2xdx}{a^2}-\frac{2ydy}{b^2}=0,$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}=1.$$

于是可设 $x=a^2t, y=b^2t$。代回曲线方程，解得 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$。于是切线方程为 $x-y=\pm\sqrt{a^2-b^2}$。

4、 计算定义在$(0,\frac{\pi}{2})$上的函数的一阶导数： $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}$

解：在方程两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\ln(e^x-1)] \qquad ①$$

在上式两端分别对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{e^x-1}] \qquad ②$$

于是

$$y'=y[\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{e^x}{e^x-1}] \qquad ③$$

$$y'=\frac{\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}}{2}[\frac{1}{x}+\cot x+\frac{e^x}{2(e^x-1)}] \qquad ④$$

5、 计算函数 $y=5x^3-4x^2+x-1$在区间$\left[-1,1\right]$上的最大值和最小值

解：函数的一阶导数为

$$y'=15x^2-8x+1$$

令 $y'=0$，得到两个驻点 $x_1=\frac{1}{3}$， $x_2=\frac{1}{5}$，均在给定的区间内

这两个点处的函数值为

$$f(x_1)=-\frac{25}{27} \qquad f(x_2)=-\frac{23}{25}$$

最值还可能出现在区域的端点处，两个端点处的函数值为

$$f(-1)=-11 \qquad f(1)=1$$

比较知道，在区间$[-1,1]$上，最小值$f(-1)=-11$，最大值$f(1)=1$。

五、证明题（每题 5 分，总共 10 分）

1、设$a>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}), (n=1,2,3,\ldots)$，求证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$

证明：$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}>0$，由此可得：

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n=\frac{a-x_n{}^2}{2x_n}\leq 0$$

即为数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，不妨设该极限值为$\beta$，且易知该极限值为正。对于原递推公式左右两边同时取极限，可得：

$\beta=\frac{1}{2}(\beta+\frac{a}{\beta})$，解得$\beta=\sqrt{a}$，原式得证。

2、若定义在(a,b)上的函数$f(x)$满足

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^c,\ 对任意\ x,y\in(a,b),$$

其中$c>1$是一常数。证明：$f(x)$在其定义域内是常数。

证明：对$x\in(a,b)$，取邻域$U_h(x)\subset(a,b)$。对$|\Delta x|<h$，有

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|\leq|\Delta x|^c,$$

于是

$$0\leq\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\leq|\Delta x|^{(c-1)}.$$

由于$\lim\limits_{\Delta x\to0}|\Delta x|^{(c-1)}=0$，由两边夹定理，

$$\lim_{\Delta x\to0}\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|=0,$$

从而$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$。由导数的定义我们得到$f'(x)=0$。从$x$的任意性，成立

$$f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b).$$

因此，由拉格朗日中值定理的推论，$f(x)$在其定义域内是常数。 □

六、作图题（10 分）

试作出函数$f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$的图形。（注：要求讨论函数的定义域、列出表格、极值点、单调区间、凹凸区间、拐点以及渐近线）

解：函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。且容易看出函数有唯一零点 $x=-1$。注意到 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$，因此 $x=1$ 是该函数的一条垂直渐近线。又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2}=5,$$

故 $y=x+5$ 是它的一条斜渐近线。此外，求导得

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}\quad,\quad f'(-1)=f'(5)=0,$$

$$f''(x)=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}\quad,\quad f''(-1)=0$$

根据上面的结果，可得这一函数的单调性、极值、凹凸性及拐点的情况如下表所示。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	增、凸	拐点	增、凹	减、凹	极小	增、凹

于是可作草图如下。