高等数学 (D 类) 期中考试试题

本试卷共 6 道大题，满分 100 分　　　　2018 年 11 月 15 日

一、判断下列叙述是否正确，如果错误，说明理由 (每题 2 分，总共 10 分)

1. 如果 x 为无穷大量，y 为有界变量，则 xy 为无穷大量；
2. 函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 是同一个函数；
3. 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $y=\left|f(x)\right|$ 在 x_0 处连续；
4. 如果 $x_n \le z_n \le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 一定存在；
5. 若初等函数 $f(x)$ 在其定义域内是单调递减的，那么它的反函数在定义域内也是单调递减的。

二、选择题，从四个选项中选择一个最恰当的 (每题 4 分，总共 20 分)

1. 当 $x\to 0$ 时，与 x^4+x 等价的无穷小量为 (　　)

   (A) x^4；　(B) x^3；　(C) x；　(D) $\sqrt{x}$.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}=$ (　　)

   (A) 0；　(B) 3；　(C) 5；　(D) 不存在

3. 设 $y=f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$，那么，$y'=$ (　　)

   (A) $f'\left(-\dfrac{1}{x}\right)$；　(B) $-f'\left(-\dfrac{1}{x}\right)$；　(C) $\dfrac{1}{x^2}f'\left(-\dfrac{1}{x}\right)$；　(D) $-\dfrac{1}{x^2}f'\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

4. 如函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0;\\ x+b, & x\le 0\end{cases}$ 是连续函数，则 (　　)

   (A) $ab=\dfrac{1}{2}$；　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$；　(C) $ab=0$；　(D) $ab=2$.

5. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的 n 阶导数为 (　　)

   (A) $\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$；　(B) $\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$；　(C) $\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^n}$；　(D) $\dfrac{n!}{(1+x)^n}$.

三、填空题 (每题 4 分，总共 20 分)

1. 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，$f'(a)=2$，那么 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+3t)-f(a-2t)}{t}=$__________；

2. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x-2)}=4$，则 $a=$__________，$b=$__________；

3. 函数 $y=x^{\sin x}$，则 $dy=$ ____________________；

4. 函数 $y(x)$ 由方程 $\sin(xy)+\ln(y+x)=x$ 确定，则 $y'(0)=$ __________；

5. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+b}{x-2}\right)^{2x+1}=e^{2a}$，则 $a-b=$ __________.

四、计算题 (每题 6 分，总共 30 分)

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;

2. 曲线 C 由方程 $y^2=x^3-xe^y$ 确定，求曲线 C 在点 $M(1,0)$ 处的切线方程;

3. 利用可微函数的性质近似计算 $\ln 1.002$ 的值;

4. 计算函数
$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$
的导函数 $f'(x)$，并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

5. 求函数 $f(x)=2-(\sin x)^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $[-\frac{1}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi]$ 上的最大值和最小值。

五、证明题 (每题 5 分，总共 10 分)

1. 已知 $|q|<1$，序列 $x_n=n^3q^n$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续，在 (a,b) 上可导，且对任意 $x\in(a,b)$，$\left|f'(x)\right|\le M$。进一步知道，在 (a,b) 内，$f(x)$ 至少有一个零点。证明：$\left|f(a)\right|+\left|f(b)\right|\le M(b-a)$。

六、绘制函数 $y=\dfrac{x}{2}-\arctan x$ 的图形 (本题 10 分，要求：写出定义域、零点，极值点、单调区间，凹凸区间，拐点，列出表格，求出渐近线，作出图形)