2024 秋高等数学 D 第六次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 12 月 24 日

1　多元函数条件极值

定义 1 (拉格朗日乘数法)**.** 为求二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点，构造辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$，则极值点所满足的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0.$$

注 1. 如果涉及到三元及以上的函数，有可能有多个约束条件，一般的情况是多元函数 $y=f(x_1,\ldots,x_n)$，约束条件 $\varphi_1(x_1,\ldots,x_n)=0,\cdots,\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)=0$. 此时我们构造的辅助函数是

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=f(x_1,\ldots,x_n)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)=0.$$

极值点所满足的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}=\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)=0.$$

尽管形式上更加复杂，但思想方法是一致的，即使看到多元函数或者多个约束条件也不用担心无法处理.

注 2. 拉格朗日乘数法/拉格朗日乘子法所给出的只是极值点的必要条件，通常情况下如果解出了唯一解，题目也是要求极值点，则可以不必额外验证．如果解出来的解不唯一，且它们对应的函数值不同，则有可能需要排除掉一些．回忆如何证明一个点不是极值点：要说明 P 不是极小值点，则要说明在 P 的任意小邻域内，都存在满足约束条件的点 Q 使得 $f(Q)<f(P)$．换言之，即存在一列点 P_k 趋于 P，且 $f(P_k)<f(P)$ 对每个 k 均成立.

注 3. 求解拉格朗日乘数法给出的方程组有时并不容易，特别是如果多元函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 中包括复杂的乘积结构，则求完偏导之后依然包含其他变量．当然其中一个方法是利用约束条件或者其他变形技巧可以简化这一结果，不过有时候可以通过取对数的方式进行简化，因为当 $f(x_1,\ldots,x_n)>0$ 时，f 的极值点和 $\ln f$ 的极值点总是一样的．这个方法同样也适用于一般极值的求法.

问题 1 (习题五第 17 题)**.** 当 n 个正数 $x_1,\cdots,x_n$ 的和为常数时，求它们乘积开 n 次根的最大值.

方法 1. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a$，则要求极值的多元函数为 $f(x_1,\ldots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$，约束条件为 $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a=0$．考虑构造的辅助函数 $F(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=f(x_1,\ldots,x_n)-\lambda\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i-$

$\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j}\prod_{i=1}^{n}x_i-\lambda=0.$$

故 $x_1=\cdots=x_n=\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}x_i$. 结合 $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$ 得到 $x_i=\frac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\frac{a}{n}$. □

方法 2. 设 $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$, 注意到 $\prod_{i=1}^{n}x_i$ 取到最大值等价于 $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 取到最大值, 则要求极值的多元函数为 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$, 约束条件为 $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i-a=0$. 考虑构造的辅助函数 $F(x_1,\dots,x_n,\lambda)=f(x_1,\dots,x_n)-\lambda\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j}-\lambda=0.$$

故 $x_1=\cdots=x_n=\frac{1}{\lambda}$. 结合 $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$ 得到 $x_i=\frac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\frac{a}{n}$. □

问题 2 (习题 5 第 13 题第 (2) 问)**.** *求函数 $u=xyz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=0$ 下的极值.*

证明. 由于 (x,y,z) 满足约束条件等价于 $(-x,-y,-z)$ 满足约束条件, 且它们对应的 u 互为相反数, 故 u 的极大值即为 $|xyz|$ 的极大值, 极小值即为其相反数. 同样可以采用取对数法, 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=\ln|x|+\ln|y|+\ln|z|-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(x+y+z)$, 求偏导得到

$$\frac{1}{x}-2\lambda x-\mu=0,\qquad\frac{1}{y}-2\lambda y-\mu=0,\qquad\frac{1}{z}-2\lambda z-\mu=0.$$

三式分别乘上 x,y,z 求和得到 $\lambda=\frac{3}{2}$. 代入得 $\frac{1}{x}-3x=\frac{1}{y}-3y=\frac{1}{z}-3z$. 因式分解得到 $x=y$ 或 $xy=-\frac{1}{3}$, 对 y,z 和 z,x 也同理. 由于不可能 $x=y=z$, 故必然是两个相等且与第三个乘积为 $-\frac{1}{3}$. 不妨设 $x=y=-\frac{1}{3z}$, 代入得 $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}},z=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 或者 $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}},z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, 分别对应极大值和极小值. 所有的极值点即为以上坐标的全部轮换. □

注 4. *不用取对数法也可以类似地证明, 但个人感觉计算会麻烦一些, 详见参考答案. 对于这种三个变量具有完全对称地位的函数和约束条件问题, 通常来说会得到 x,y,z 同时满足某个相同的方程, 这时可以考虑利用韦达定理. 但是不能由此认为 $x=y=z$.*

注 5. *对于约束条件没有通过明显的表达式给出的情况, 需要自行转化, 这时需要仔细阅读题目中给出的约束条件, 列出正确的表达式. 习题五第 14 题中的长方体是半球内接, 许多同学当作球内接来做, 会得到错误的约束条件和结果.*

2 多元函数偏导与微分回顾

注 6. 多元函数的偏导数求法，本质上同一元函数的求导相同，只要记住把其他的变量都当成无关的常数系数，然后自然运用一元函数的求导法则就可以了.

问题 3 (习题五第 3 题第 (5) 问)**.** 求函数 $z = e^{xy} + yx^2$ 的偏导数.

注 7. 多元函数的复合函数偏导数求法，本质上同一元函数的复合函数求导也相同：设 $y = f(u), u = g(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

现在设 $z = f(u,v), u = g(x,y), v = h(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}.$$

不过在具体计算中，往往不用拘泥于这个复合函数偏导数求法，只要熟悉一元函数的复合函数求导法则，把 z 直接化成关于 x, y 的函数然后求偏导即可.

问题 4 (习题五第 8 题第 (4) 问)**.** 求函数 $z = y + f(v), v = y^2 - x^2$ 的偏导数.

注 8. 所谓的一阶微分形式不变性，在一元函数和多元函数中也是互通的. 在注 7 中，y 作为关于 x 的函数总是有 $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$ 成立，而现在 y 又是关于 u 的函数，则有 $\mathrm{d}y = y'(u)\mathrm{d}u = f'(u)\mathrm{d}u$. 而 u 又是 x 的函数，则有 $\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x = g'(x)\mathrm{d}x$. 代入得到

$$\mathrm{d}y = f'(u) \cdot g'(x)\mathrm{d}x.$$

这与 $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$ 是相同的. 也就是所谓一阶微分形式不变性.

对二元函数来说，在注 7 中，z 作为关于 x, y 的函数总是有 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 成立，而现在 z 又是关于 u, v 的函数，则有 $\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$. 而 u, v 又是 x, y 的函数，则有 $\mathrm{d}u = \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}v = \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y$. 代入得到

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial u}(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y).$$

这与 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 是相同的.

所以在计算全微分的时候，我们仍然不需要拘泥于复合函数求偏导的法则，要计算 $\mathrm{d}z$，而 z 的明确函数关系是关于 u, v 的，那就写成关于 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 的表达式，然后再利用 u, v 关于 x, y 的函数关系得到答案.

3 二重积分的计算

注 9. 在本课程中所要求的所有二重积分计算，都可以化归成所谓累次积分的计算，也就是对于二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，我们总是把区域 D 写成 $x \in [a,b], y \in [y_1(x), y_2(x)]$ 的形式 (或者反过来)，也就是在 xy 平面上，先用 $x = a, x = b$ 两条竖线框住 D 的左右边界，然后再对每个 x，算出 y 的上下限. 然后将积分

变成

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

积分时先算后面对 y 的积分, 此时所有的 x 都看成无关的常数系数, 积出来得到关于 x 的函数再做一次积分.

特别地, 在用二重积分计算空间立体体积时, 不需要能够想象出三维图形, 只要能画出平面上的积分区域 D 的形状, 就可以计算了.

注 10. 二重积分的题型一共只有三种: 直接求积分, 求平面图形面积, 求空间立体体积. 第一种就是累次积分的正常计算, 第二种就是在该区域上积分 1 这个函数, 第三种则是要先画出该空间立体在 xy 平面上的投影区域 D, 然后在 D 上求一个二重积分, 被积函数 $f(x,y)$ 就是这个空间立体在 (x,y) 点处的高度, 也就是围成该空间立体的两个曲面 z 坐标的高度差.

问题 5 (习题五第 18 题第 (3) 问)**.**

$$\int\int_D (y+x^2)\mathrm{d}\sigma.$$

其中 D 是由 $y=x^2, y^2=x$ 围成的区域.

问题 6 (习题五第 19 题第 (1) 问)**.** 计算曲线 $y=x^2, y=x+2$ 围成的平面图形的面积.

问题 7 (习题五第 20 题)**.** 计算由曲面 $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.

问题 8 (习题五第 20 题变式)**.** 计算由曲面 $z=\dfrac{1}{2}-x-y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.

4 祝大家期末顺利!