2024 秋高等数学 D 第五次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 12 月 10 日

1　多元函数及其极限

1.1　多元函数的基本概念

定义 1 ($\mathbb{R}^2$ 中的距离). 设 P, Q 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标分别为 $P(x_1, x_2), Q(y_1, y_2)$, 则定义 P 与 Q 之间的距离为

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

定义 2 ($\mathbb{R}^n$ 中的距离). 设 P, Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 坐标分别为 $P(x_1, ..., x_n), Q(y_1, ..., y_n)$, 则定义 P 与 Q 之间的距离为

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

注 1. 我们考虑这样定义的 $\mathbb{R}^2$ 中两点的距离和它们各自分量之间的距离 (一维实轴上的距离) 的关系: 一方面, P, Q 的距离可以控制它们各自分量之间的距离:

$$|x_1 - y_1| \leq d(P,Q), \quad |x_2 - y_2| \leq d(P,Q);$$

另一方面, 它们各自分量之间的距离的整体可以控制 P, Q 之间的距离:

$$d(P,Q) \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

这里的所谓控制是一个重要的数学思想, A 能控制 B 的意思就是我们可以用 A 的大小去盖住 B 的大小, 如果它们能相互控制, 那么估计其中一个的范围就能给出另一个的范围. 这时我们称这两个东西等价, 数学上我们不区分相互等价的东西.

定义 3 ($\mathbb{R}^2$ 中的邻域). 设 P 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标为 $P(x_1, x_2)$, 则定义 P 的 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘, 即下面的点集:

$$U_\delta(P) = \{Q = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \delta\}.$$

定义 P 的空心 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘去掉 P 点, 即下面的点集:

$$U_\delta(\bar{P}) = \{Q = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \delta\}.$$

定义 4 ($\mathbb{R}^n$ 中的邻域). 设 P 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 坐标为 $P(x_1,...,x_n)$, 则定义 P 的 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的开球, 即下面的点集:

$$U_\delta(P)=\{Q=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n|d(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2<\delta}\}.$$

定义 P 的空心 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的开球去掉 P 点, 即下面的点集:

$$U_\delta(\bar{P})=\{Q=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n|0<d(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2<\delta}\}.$$

注 2. 前面提到过, 两点之间的高维距离和各自分量的一维距离可以相互控制, 反映在邻域上就是: 一方面, P 的邻域限制在两条坐标轴上, 一定会分别包含以对应分量 x_1,x_2 为中心的一个开区间; 另一方面, 以 x_1,x_2 为中心的两个开区间作乘积得到的矩形, 一定会包含 P 的一个邻域.

定义 5 (二元函数极限的两种等价定义). 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个空心邻域内有定义, 对于常数 A, 称 A 为 $f(x,y)$ 在 P 点处的极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,$$

如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $(x,y)\in U_\delta(\bar{P})$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$. 等价地, 极限的定义也可以换成当 $x\in U_\delta(x_0),y\in U_\delta(y_0),(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.

注 3. 两者的等价性正是来源于上面提到的两种邻域的等价性. 第一种定义是说, 只要自变量落在充分小的圆盘邻域内, 函数值就充分接近; 第二种定义则是换成了方形邻域. 但是前面已经提过, 这两种邻域是等价的, 因为任意小的圆盘邻域内都包含充分小的方形邻域, 反之亦然.

定义 6. 多元函数极限的四则运算法则, 保号性, 夹逼定理, 复合法则, 以及多元函数连续与间断的定义, 与一元函数完全相同.

1.2 多元函数极限计算

注 4. 计算多元函数的极限更多地就是使用定义本身来验证, 而且验证的过程并不容易, 要时刻记住”路径任意”这件事情. 我们通过一个一般的例子来说明这件事情的重要性.

问题 1. 对任意连续函数 $f(x)$, 满足 $f(0)=0$ 且当 $x\neq0$ 时 $f(x)\neq0$, 则二元函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)y}{f(x)^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

沿路径 $(x,f(x))$ 趋于原点时恒等于 $1/2$, 沿路径 $(x,0)$ 趋于原点时恒等于 0, 因此在原点处不连续.

注 5. 在一元函数的极限计算中, 我们最喜欢的是 x 以及其他多项式, 并经常以它们为基准衡量其他函数的增长或者衰减速度, 如无穷小量替换 $\ln(x+1),e^x,\sin x$ 等等. 这主要是因为, 验证函数极限就是说明函数值之间的距离与自变量之间的距离存在一些关系: 当自变量之间距离充分小的时候, 函数值之间距离

也可以充分小. 以研究 $x \to 0$ 的极限过程为例: $|x|$ 就代表了 x 到原点的距离, 也就是自变量之间的距离, 如果能将 $f(x)-f(0)$ 也转化成多项式, 就可以通过 $|x|$ 同时沟通自变量之间和函数值之间的距离.

现在变成二元函数的情况下, 自变量之间的距离变成了 $\sqrt{x^2+y^2}$, 所以相应地我们也要把函数值转化为跟 x^2+y^2 直接相关的量. 常用的就是均值不等式:$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 进一步, 对任意的 $\alpha, \beta \geq 0$, $|x^\alpha y^\beta| \leq C(x^2+y^2)^{(\alpha+\beta)/2}$. 如果出现其他初等函数, 可以先用一元的无穷小量替换: $\ln(1+xy), \sin(x+y)$ 等等. 极坐标换元 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 也是常用的办法, 将问题转化为一元极限 $r \to 0$.

问题 2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2).$$

问题 3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),\ \text{其中} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}.$$

问题 4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

注 6. 对于多元函数来说, 如果想证明极限不存在其实是比较容易的, 只需要观察函数的特征然后取两条特定的路径即可, 一般来说这样的路径可以简化函数的形式.

问题 5. 判断下面极限是否存在:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

问题 6. 已知一元函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 可导, 且导函数 $f'(x)$ 连续, $a \in \mathbb{R}$, 求极限:

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} g(x,y),\ \text{其中} g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & x \neq y \\ f'(x) & x = y \end{cases}.$$

思考 1. 对于二元函数 $f(x,y)$ 和点 $P(x_0,y_0)$, 我们还可以定义如下的累次极限:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

累次极限和我们定义的二元函数的极限之间有什么关系? 累次极限交换对 x 和 y 的求极限顺序是否会变化? 什么情况下我们可以说二元函数极限等于累次极限?

2　多元函数的偏导数与全微分

2.1　偏导数

定义 7 (偏导数与可导性)**.** 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 则 $g(x) \triangleq f(x,y_0)$ 是在 x_0 的某个邻域内有定义的一元函数. 如果 $g(x)$ 在 x_0 处可导, 则称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处存在对 x 的偏导数, 并记为

$$f'_x(x_0,y_0) = g'(x_0).$$

偏导数的记号有时也写成 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 或 $\partial_x f(x_0, y_0)$. 如果二元函数 $f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 处对 x, y 的偏导数都存在, 则称 $f(x, y)$ 在 P 处可导.

注 7. 从定义中可以看出, 多元函数的偏导数只反映函数在经过该点的某条坐标轴上的性质, 而无法刻画坐标轴之外的点处函数的性质, 所以对于多元函数而言不存在"可导 $\Rightarrow$ 连续"这一准则. 一般地, 可导的条件甚至无法给出该点任意邻域内的性质, 即使是"可导 $\Rightarrow$ 有界"都是错误的.

注 8. 多元函数偏导数的计算本质上是一元函数的求导, 因此只要熟练掌握了一元函数的求导, 并且弄清楚哪些字母是自变量, 哪些字母是因变量, 偏导数的计算就易如反掌. 在处理隐函数求偏导问题时, 一定要分清楚自变量和因变量.

问题 7. 设 $f(x, y) = xy + \sin(x^2 + y^2) - \dfrac{\sqrt{x}}{\ln y}$, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

问题 8. 设 $z = z(x, y)$ 是由以下方程决定的隐函数: $xyz + \sin(x^2 + y^2 + z^2) - \ln(xz + yz^2) = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

问题 9. 证明: 以下定义的函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.2 全微分

注 9. 前面已经提到过, 对于多元函数来说, 偏导数只能反映函数在坐标轴上的信息, 那么自然我们需要一个更强的条件, 能够刻画函数在整个邻域里面的信息, 并且这个性质是比连续性更好的, 就像一元函数里面一样. 这就需要考虑一元函数的导数的本质: 即函数在一点附近, 函数值之间的距离和自变量之间的距离近似有线性关系 $\Delta y = f'(x)\Delta x$. 这个定义可以自然拓展到多元的情况.

定义 8 (全微分与可微性)**.** 设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上点 $P(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义, 如果存在常数 A, B 使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$

则称 $f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 处可微, 并记 f 在 P 处的全微分为

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y.$$

注 10. 根据定义可以直接得到"可微 $\Rightarrow$ 连续", 而在定义式中令 $\Delta y = 0$, 两边同时除以 Δx 并令 $\Delta x \to 0$, 就得到 f 在 P 处对 x 存在偏导数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A$. 同理有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$. 所以"可微 $\Rightarrow$ 可导". 由以上结果也可以看出, 求函数的全微分本质上就是求函数的偏导数, 因此计算上也是简单的.

注 11. 可微 $\Rightarrow$ 连续, 可微 $\Rightarrow$ 可导, 可导 + 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微, 连续和可导互相不能推出.

定义 9 (复合函数微分)**.** 设二元函数 $z = f(u, v)$, 且 u, v 均为关于 x, y 的二元函数: $u = g(x, y), v = h(x, y)$, 则 z 也可以写成关于 x, y 的二元函数: $z = f(u, v) = f(g(x, y), h(x, y)) \triangleq F(x, y)$. 以下等式成

立:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}.$$

注 12. 如果习惯微分的写法, 以上等式其实是比较自然的:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\Big) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \Big(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y\Big).$$

按照 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的系数整理一下就得到上面的等式.

思考 2. 在必要的时候, 一定要区分 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 设二元函数 $z = f(x, y)$, 且 $y = g(x)$ 为关于 x 的函数, 则 z 也可以写成关于 x 的函数: $z = f(x, g(x))$. 如何计算 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$? 它等于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 吗?