2024 秋高等数学 D 第四次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 11 月 26 日

1　第七次作业选讲

1.1　不定积分的基本概念

定义 1. 函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)(x \in X)$ 的一个原函数, 如果对 $\forall x \in X$, 都有 $F'(x) = f(x)$.

定义 2. 函数 $f(x)$ 的不定积分是指它的全体原函数, 记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

命题 1. 如果 $F(x)$ 是 $f(x)(x \in X)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

思考 1. 常见函数的原函数必须烂熟于心, 至少要马上反应出怎么算:

$$1, x^\alpha, a^x, \sin x, \cos x, \tan x, \frac{1}{a+bx^2}, \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}, \ln x.$$

思考 2. 我们要在什么样的区间上求出 $F(x)$: 如果 $f(x)$ 的定义域是分段区间, 在每个区间上可导, 那么我们也应当在每个区间上求出原函数 $F(x)$. (例子: $f(x) = \frac{1}{x}$ 或 $f(x) = \ln(x^2-1)$.) 必要的时候要进行分类讨论, 但一般情况下不需要在答案中强调定义域, 除非结果不能统一成一个形式.

思考 3. 求不定积分或者求原函数本质上是求导的逆运算, 所有的计算方法都要服从于求导法则, 如两个换元法和分部积分法, 分别来源于复合函数求导的链式法则和函数乘积的求导公式. 不能自己想当然地创造积分方法.

问题 1 (习题四第 3 题第 (5)(6) 问)**.** *(5)* $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.　　*(6)* $\int \frac{2x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

奇怪的思路. 想要求出 $f(x)$ 的一个原函数, 先凑一个感觉上求导之后差不多的 $F(x)$, 算出来发现 $F'(x) = f(x)g(x)$, 多了一个乘积因子 $g(x)$, 于是直接得出 $F(x)/g(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

$$(5) \int \tan^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\tan^3 x\cos^2 x + C.$$

$$(6) \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{2x} + C.$$

□

注 1. 既然求不定积分是求导的逆运算, 那么一方面想要快速准确地算好积分, 就要对求导运算非常熟练, 另一方面也总可以通过求导来验算自己是否算对了.

注 2. 根据定义,不定积分是全体原函数,所以会有我们老生常谈的 $+C$ 问题. 一定要注意因为这个 $+C$ 的存在,所以前面求出的原函数在相差一个常数的情况下都是对的:

$$\frac{1}{5}\arcsin 5x + C = -\frac{1}{5}\arccos 5x + C.$$

换句话说,原函数有无穷多个,我们写出来的时候只是挑了一个作为代表元,那么自然也有无穷多种挑法. 所以不定积分的结果从形式上看肯定有多种写法.

1.2 换元法的运用

定义 3. 换元法实际上都是利用复合函数求导的链式法则,来达到简化被积函数的目的. 第一换元法侧重于从被积函数中"删掉"一些多余的项,需要对微分的写法比较熟练:

$$a\mathrm{d}x = \mathrm{d}(ax+b), \quad x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2), \quad e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}e^x, \quad \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x.$$

第二换元法侧重于往被积函数中"添加"一些新的项. 最常见的是三角换元,可以帮我们去掉根号.

注 3. 三角换元 $x = \sin t$ 等虽然是很有效的工具,但是由于三角函数的周期性,我们对反三角函数是有值域的限制的:

$$\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \arccos x \in [0, \pi), \quad \arctan x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

如果不加以说明,换元之后变量 t 的取值范围就可能有歧义,也容易在后面的计算中误导自己,因此希望大家都要写出 t 的取值范围. 特别地,因为原来的积分变量 x 一般来说不是正数,所以不要通过画直角三角形的方式来说明.

问题 2 (习题四第 4 题第 (17) 问)**.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x.$

错误解答. 令 $x = a\sec t$, 则 $\mathrm{d}x = a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \cos t \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t \\ &= a\int \tan^2 t\mathrm{d}t \\ &= a(\tan t - t + C).\end{aligned}$$

又 $t = \arccos\frac{a}{x}$, $\tan t = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

□

注 4. 本次作业几乎所有同学本题都是采用以上的写法,问题就出在换元之后的第一步变换,因为 t 的取值范围是 $[0,\pi)$, 对应地 $\tan t$ 有正负两种取值,分别对应 x 的正负两种取值,所以拆开根号之后实际上得到的是 $|\tan t|$. 这时就需要分类讨论,得到的结果也是分段的,当然可以从形式上将其合并,但这是三角换元常见的问题.

注 5. 之所以强调求完积分之后要求导验算, 就是因为这里如果进行一步验算就会发现, 当 $x<0$ 的时候这个结果求导后不等于原来的被积函数.

正确解答 *1.* 令 $x=a\sec t$, $t\in[0,\pi)$, 则 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 当 $x>a$ 即 $t\in[0,\dfrac{\pi}{2})$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x&=\int\cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\&=a\int\tan^2 t\mathrm{d}t\\&=a(\tan t-t+C).\end{aligned}$$

又 $t=\arccos\dfrac{a}{x}$, $\tan t=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

当 $x<-a$ 即 $t\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x&=\int\cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\&=a\int-\tan^2 t\mathrm{d}t\\&=-a(\tan t-t+C).\end{aligned}$$

又 $t=\arccos\dfrac{a}{x}$, $\tan t=-\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=-\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}+a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

综上, 所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C.$$

□

正确解答 2.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-a^2}{x^2}\mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2}\\ &= \int \frac{t^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t \quad (t=\sqrt{x^2-a^2})\\ &= a\int \frac{y^2}{y^2+1}\mathrm{d}y \quad (t=ay)\\ &= a(y-\arctan y+C)\\ &= t-a\arctan\frac{t}{a}+C\\ &= \sqrt{x^2-a^2}-a\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C.\end{aligned}$$

□

1.3 分部积分的运用

定义 4. 分部积分实际上是利用函数乘积的求导公式导出的方法，是最常见的处理复杂积分的方式. 尤其如果被积函数中出现对数函数 $\ln x$，反三角函数 $\arctan x, \arcsin x, \arccos x$ 等求导之后可以变成多项式的函数，或者出现指数函数 e^x，三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x$ 等求导有不变性质或循环性质的函数，用一到两次分部积分会有很大的作用.

问题 3. 求不定积分:

$$\int x^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

2 不定积分补充习题

问题 4 (正态分布). 求不定积分:

$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

问题 5 (观察换元). 求不定积分:

$$\int x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

问题 6 (有理函数). 求不定积分:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x.$$

问题 7 (分部积分). 求不定积分:

$$\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

问题 8 (万能代换). 求不定积分:

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

问题 9 (综合运用). 求不定积分:

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x.$$

3 定积分

3.1 定积分的基本概念

定义 5. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界, 如果存在一个常数 I, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意一个 $[a,b]$ 上的分割 $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ 和任意的中间值 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\max|x_i - x_{i-1}| < \delta$, 就有

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\Big| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, I 称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 6. 以前我们往往觉得, 定积分不过就是不定积分加上了积分上下限, 只要能求出原函数, 代入两个值作差就得到定积分, 所以问题的关键在于求出原函数. 但是通过以上的定义我们会发现, 定积分的定义本质上是与所谓求导逆运算完全无关的, 之所以可以和不定积分关联起来, 是根据牛顿-莱布尼兹法则得出的.

而且我们也很容易发现, 许多函数是可积的, 却无法求出原函数, 所以它们无法被计算不定积分, 但是在特定区间上的定积分却是可以计算的. 从这个角度上看, 不定积分只是一种运算, 而定积分才是揭示函数整体性质的本质工具.

3.2 变限积分

定义 6. 定积分的第一个作用就是为我们提供了构造原函数的方法. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 定义 $f(x)$ 的变上限积分为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

变下限积分为

$$G(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

则变上限积分和变下限积分的求和是一个定值: $F(x) + G(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

命题 2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.

注 7. 从原函数的角度来看, 变上限积分的积分下限不一定要取成 a, 而是可以取成任意的一个固定点, 因为这样的变换只会让 $F(x)$ 变化一个常数, 求导之后不变, 也就是都是 $f(x)$ 的原函数. 一般取成区间左端点是因为习惯让积分上限大于等于积分下限.

问题 10. 求函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 11. 求极限:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{x^2}.$$

问题 12. 求函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^{2\ln x} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 13. 求极限:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_0^{2\ln x}\frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{(x-1)^2}.$$

问题 14. 求函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^{2\ln x} tx\mathrm{d}t$ 的导数.

3.3 定积分计算极限

定义 7. 在实际题目中, 我们基本上不会遇到不可积的函数, 也不会要求用定义验证一个函数是否可积. 但是反过来根据定积分的定义, 往往可以解决一系列求和形式的极限.

问题 15.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{n+i}{n}.$$

问题 16.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{i}{n}.$$

问题 17.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}.$$