2024 秋高等数学 D 第三次习题课讲义

数学科学学院 冯宣瑞 2401110009

2024 年 11 月 12 日

1 第五次作业选讲

1.1 洛必达法则的应用

问题 1 (习题三第 9 题)**.** *求下列各极限，并指出能否使用洛必达法则？为什么？*

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$*;* *(2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

注 1. *我们回顾洛必达法则的适用条件：如果极限* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *是* $\dfrac{0}{0}$ *型或* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *型未定式，不能直接通过连续函数代入的方法求出极限，则可以对上下同时求导，如果此时得到的极限存在，则原极限也存在且极限值相等. 以上的条件缺一不可.*

错误解答 1: *判断错误.* 题中函数分子分母在定义域内都可导，且所求极限都是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 所以可以使用. □

错误解答 2: *理由错误.* 部分同学的判断正确，但是说明的理由有误.

· 不能使用，因为 $1-\cos x$ 和 $1+\cos x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡/没有极限/不能确定/分母可能为 0.

· 不能使用，因为分子分母在定义域内不是处处可导.

· 不能使用，因为 $\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡. □

注 2. *另外，本题还需要算出这两个极限，请大家平时作业注意读题，否则考试在这里吃亏非常可惜.*

问题 2 (习题三第 8 题 (4) 问)**.** $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\cot x}{\ln x}$.

注 3. $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$*，因此本题答案为* $-\infty$*，课后答案有误.*

错误解答: 这也能洛吗. 对洛必达法则的使用错误.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{\ln x\cdot\tan x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=0.$$ □

正确解答. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0+0}-\dfrac{x}{\sin^2 x}=-\infty.$ □

问题 3 (习题三第 8 题 (6)(14) 问)**.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$*;* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}$.

错误解答: 只洛一次吗. 用完一次洛必达法则后发现分子代入为 0，就直接下结论.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}=0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\frac{\tan(x-1)}{\cos(\pi x/2)}=0.$$ □

正确解答. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin 2x}{-\sin 6x}=\frac{1}{3}$. □

正确解答. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\frac{\tan(x-1)}{\cos(\pi x/2)}=-\frac{4}{\pi^2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos^2(x-1)\sin(\pi x/2)}=-\frac{4}{\pi^2}$. □

问题 4 (习题三第 8 题 (10)(12) 问)**.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{5x}}$.

注 4. 这两道题都是典型的多项式/指数型的极限, 本质上是要利用指数函数求导不变, 而多项式有限次求导为 0 的性质去多次运用洛必达法则. 在书写过程的时候, 我们要将这个多次求导的过程展现出来, 不能笼统地写大白话. 对于 *(10)* 问这种变形的结构, 还要找到合适的转化方法.

错误解答. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{100x^{99}}=...=0$. □

注 5. 如果直接对原来的函数上下求导, 由于分子会创造出来一个 $\frac{2}{x^3}$, 其中的 x^3 会乘到分母上去, 所以分母的多项式次数反而会不断增大, 这样最后是得不到答案的. 这也是大家一定要把每次求导之后的结果写清楚的原因.

正确解答. 令 $t=\frac{1}{x^2}$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}=...=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0$. □

正确解答. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{5e^{5x}}=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{5^n e^{5x}}=0$. □

1.2 罗尔定理的应用

问题 5 (习题三第 1 题)**.** 设 $f'(x)=a$, 试证: $f(x)=ax+b$.

注 6. 本题严格的写法应该用罗尔定理的推论, 有些同学解答中写: 函数的变化率不变, 所以是一次函数. 这不是严谨的数学解答.

问题 6 (习题三第 6 题, 第 7 题)**.** 用中值定理证明下面各等式:

(1) $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

若 $|x|\le 1$, 证明 $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$.

注 7. 本题考查的是通过求导等于 0 来证明某个函数为常函数, 进而通过代入特殊值得到其函数值. 有的同学利用反三角函数的定义, 使用几何法来书写证明, 但这里没有交代 $x>0$, 用它来表示某个直角三角形的边长是不严谨的.

2 单调, 极值, 最值, 凹凸

注 8. 回顾我们在第一次习题课上提到的, 高等数学课程的主要内容就是通过连续, 导数, 积分这三个工具, 研究常见函数的性质. 连续函数的最本质的性质就是最值定理和中间值定理及其推论, 而当我们有了可导性之后, 就可以研究一系列新的性质, 这就是课本第三章最后两节的内容.

问题 7. *判断以下说法是否正确:*

(1) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(2) 可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(3) 可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x)>0$ 在 (a,b) 上除有限个点外都成立.

(4) 函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

(5) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

(6) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$.

(7) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义, $x_0\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则存在 x_0 的邻域 U, 使得 $f(x)$ 在 x_0 处取到 U 上的最值.

(8) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数的充要条件是 $f''(x)<0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(9) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数的充要条件是对任意 $x,y\in(a,b)$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$, 都有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

第 (9) 问的证明. 本题的条件实际上是说: 在开区间 (x,y) 上的任意一点 z, 过 z 作平行于 y 轴的竖直直线, 与 $f(x)$ 和 $f(y)$ 的连线交于一个点 P, 那么 P 必然在 $f(z)$ 的上面. 也就是" 等分点的函数值 $<$ 函数值的分点". 同学们可以画图理解一下.

若 $f(x)$ 是凸函数, 令 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, 则过 $(z,f(z)$ 作函数的切线得到的方程是 $y=f'(z)(x-z)+f(z)$. 根据定义, 函数图像在这条切线的下面, 因此在横坐标 x,y 处分别有:

$$f(x)<f'(z)(x-z)+f(z), \tag{1}$$

$$f(y)<f'(z)(y-z)+f(z). \tag{2}$$

将(1)乘上 λ, (2)乘上 $1-\lambda$, 两式相加得到:

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)<f(z).$$

即为 (9) 中所给的条件.

反之, 若 (9) 中所给的条件成立, 我们希望证明对任意的 z, 函数过 $(z,f(z))$ 的切线在函数图像的上面. 任取 $x<z$, 对任意的 $y>z$, 令 $\lambda=\dfrac{y-z}{y-x}$, 则可以直接验证 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. 于是

$$f(z)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

变形得到:

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z}<\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{f(z)-f(x)}{y-z}.$$

根据 λ 的定义, 右边等于 $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$. 而左边令 $y\to z$ 我们得到

$$f'(z)\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

变形即可得到 $f(x)\le f'(z)(x-z)+f(z)$, 也就是 $(x,f(x))$ 在过 $(z,f(z))$ 的切线的下面. 所以函数是凸的. □