2024 秋高等数学 D 习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 10 月 15 日

1　准备内容

1.1　助教信息

冯宣瑞　数学科学学院 2024 级博士生
学号: 2401110009
研究方向: 基础数学-偏微分方程
邮箱 (可以邮件答疑): pkufengxuanrui@stu.pku.edu.cn
个人主页 (可以找到课程资料): fengxuanrui.github.io

1.2　课程信息

正课时间: 1-16 周每周, 周二 1-2 节, 周四 3-4 节.
正课地点: 一教 101.
习题课时间: 1-16 周双周, 周二 10-11 节.
习题课地点: 三教 405.
评分标准: 作业 20 分 + 期中考试 40 分 + 期末考试 40 分.
期中考试时间: 第八周周四 3-4 节.
期中考试地点: 一教 101, 一教 201.
期末考试时间: 2025 年 1 月 2 日周四上午 8:30-10:30.

1.3　关于答疑

答疑时间地点: 单周周二 19:00-21:00, 智华楼一楼讨论室; 双周周二习题课课后, 三教 405.
答疑方式: 线下 + 微信 + 邮件.

1.4　关于习题课

内容: 评讲作业 + 补充习题 + 课后答疑.
不计考勤, 允许不影响他人的迟到早退, 不占分数. 可以随时举手提问.

1.5 关于作业

评分标准: 每次作业满分 100 分, 错 0-2 题不扣分, 错 3-4 题 95 分, 依此类推, 最后加起来折合成 20 分计入课程总评. 如果个别作业题目过难, 可能会进行适当调整, 作业打分主要看大家的完成态度, 不会在这一项过分为难大家. 请大家认真准备考试.

提交方式: 正课提交纸质版作业, 习题课或正课发回.

1.6 说在前面的话

1. 为什么要学高数
2. 高数是什么
3. 怎么学好高数
4. 怎么拿到高分
5. 高数之后

2 第一次作业选讲

2.1 周期函数: 习题一第 11 题

定义 1. 周期, 周期函数, 最小周期.

问题 1. 指出下列函数中哪些是周期函数, 哪些不是; 若是周期函数, 指出其周期.

(1) $y=\sin ax\,(a>0)$. *(2)* $y=4$. *(3)* $y=\sin 2x+\sin \pi x$. *(4)* $y=\sin x+\cos x$.

注 1. 在未加说明的情况下, 应当指出其全部周期.

思考 1. 指出以下定义的 *Dirichlet* 函数的全部周期.

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

2.2 反函数: 习题一第 14 题

问题 2. 已知 $f(x)=x+1$, 求 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

错误解答. 由于 $f(x)=x+1$, 所以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+1$. 令 $y=\dfrac{1}{x}+1$, 则 $x=\dfrac{1}{y-1}$. 所以

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}.$$

□

正确解答. 令 $y=x+1$, 则 $x=y-1$, 即 $f^{-1}(x)=x-1$. 代入 $\dfrac{1}{x}$ 得

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-1.$$

□

注 2. 错误解答中求出来的实际上是 $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 这个函数的反函数，而题中所求则是 $f(x)$ 的反函数代入 $\frac{1}{x}$ 这个自变量得到的函数.

思考 2. 如何确定反函数的定义域.

3 第二次作业选讲

3.1 求极限: 习题一第 19 题

问题 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1}$.

错误写法 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}}{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0.$ □

错误写法 2. 因为 $n^{1/3}\sin n < n+1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1} = 0.$ □

正确写法. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^{2/3}+n^{-1/3}} = 0$，最后一步用到 $|\sin n| \le 1$ 和 $n^{2/3}+n^{-1/3} \to \infty$. □

注 3. 这实际上就是课本提到的: 有界函数 × 无穷小量 = 无穷小量.

思考 3. 常见的无穷大量之间的大小关系: $n, n^\alpha, a^n, n!, \log n, n^n$.

思考 4. 常见的无穷小量之间的大小关系: $x, \sin x, \tan x, 1-\cos x, x^\alpha, a^x - 1, \log(x+1), \arcsin x, \arctan x$.

注 4. 关于洛必达法则: 有很多同学在本次作业中用到，我做了批注但没有扣分，因为在本课程的知识体系中还没有讲到这一知识. 如果期中考试前老师已经讲到，考试可以使用，否则非常不建议大家使用洛必达法则计算极限.

3.2 证明题: 补充题第 2 题

问题 4. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，以及 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. 证明: $|a| \le 1$.

逻辑关系错误 1. $|x_n| \le \epsilon, |x_n| \le |a| \cdot \epsilon \Rightarrow |a| \le 1.$ □

逻辑关系错误 2. $|x_n| \le \epsilon, |x_{n+1}| \le \epsilon$. 则 $|x_{n+1}| - |a| \cdot |x_n| \le |x_n| \Rightarrow \epsilon - |a| \cdot \epsilon \le \epsilon.$ □

逻辑关系错误 3. $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = a.$ □

逻辑关系错误 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} x_n} = a.$ □

逻辑关系错误 5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow |x_{n+1}| \le |x_n|.$ □

逻辑关系错误 6. $\left|a - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \epsilon \Rightarrow |a| \cdot |x_n| - |a| \cdot |x_{n+1}| < |a| \cdot \epsilon.$ □

逻辑关系错误 7. $|x_n|$ 单调递增 $\Rightarrow |x_n|$ 是发散数列. □

注 5. 以上的几种错误在作业批改中屡见不鲜，其实如果单独作为判断题让大家做，几乎所有的同学都能判断出其中的错误，但是自己写证明的时候往往意识不到，或者推到这一步发现推不出想要的结论，却没有去更换前面的思路，而是将错就错.

3.3 证明题: 补充题第 3 题, 第 4 题

问题 5. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$. 请用 $\epsilon-\delta$ 语言证明: $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

问题 6. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$. 请用 $\epsilon-\delta$ 语言证明: $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 x_0 附近有界.

思考 5. 函数有界, 有上界, 有下界的定义分别是什么.

逻辑关系错误 *1.* $A-\epsilon<f(x)<A+\epsilon\Rightarrow\dfrac{1}{A-\epsilon}<\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{A+\epsilon}$. □

逻辑关系错误 *2.* $|f(x)|\le A\Rightarrow\dfrac{1}{|f(x)|}\le A$. □

自行增加条件. 假设 $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=B$, 则 $B^2=A$. □

注 6. 在求解极限或证明题中, 除非可以使用已有的结论 *(*单调有界必收敛*)*, 否则不能先行假设所求极限存在并代入运算.

问题 7 (2019 秋期中)**.** 设 $a>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$, 求证 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

3.4 证明题的书写规范

思考 6. 表达的合理性: 令 $x=\dfrac{1}{x}$. 令 $\epsilon=|a|\epsilon$.

注 7. 在极限的标准定义中, 我们要证明

$$\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<\epsilon.$$

实际上最后的 ϵ 可以换成任意只依赖于 ϵ 和其他普适常数, 不依赖于 N, 而且可以取到充分小的正数.

思考 7. 以下对于 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ 的定义的几种变形, 哪些是正确的, 哪些是错误的.

$$\begin{aligned}
&\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<2\epsilon.\\
&\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<\epsilon^2.\\
&\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<N\epsilon.\\
&\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<\frac{\epsilon}{N}.\\
&\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<\sqrt{\epsilon}.\\
&\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<|x_n|\epsilon.\\
&\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,|x_n-x|<|x|\epsilon.
\end{aligned}$$

思考 8. 什么才是严谨的数学推导: 远远超过, 增长得很快, 没有这个大, $\Longleftrightarrow$ 计算极限.

注 8 (西江月 · 证明)**.** 即得易见平凡, 仿照上例显然. 留作习题答案略, 读者自证不难.
反之亦然同理, 推论自然成立, 略去过程 *QED*, 由上可知证毕.

思考 9. 是不是每个绝对值都要拆开分类讨论.

思考 10. 每一条结论的依据是不是写清楚了.

2024 秋高等数学 D 第二次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 10 月 29 日

1　第三次作业选讲

1.1　x^x 型极限: 对数法与重要极限法

问题 1 (习题一第 19 题 (19) 问)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n$.

问题 2 (习题一第 19 题 (20) 问)**.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

问题 3 (习题一第 19 题 (21) 问)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+m}$.

注 1. *以上三道作业题均为 x^x 型极限, 也就是要求极限的表达式中底数和指数同时含有未知数. 由于形式非常接近第二个重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, 很多同学采用变形法凑出相应的表达式, 完全正确. 不过在掌握对数法后, 可以尝试解决更复杂的问题.*

问题 4 (2023 期中)**.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sin x)^{\tan x}$.

问题 5 (2019 期中)**.** 若函数 $f(x)=\begin{cases}e^a & x\le 0\\ \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值.

思考 1. 取对数的合法性: 为什么我们可以认为要求极限的这个表达式是正的.

注 2. *对数法只是化简表达式的第一步, 把陌生的 x^x 结构转化成熟悉的乘除结构, 变成初等函数的形式. 之后经常可以配合无穷小量替换 (解决出现的 $\ln x$), 洛必达法则 (进一步化简乘除结构), 三角函数的有界性等技术继续转化. 我们最喜欢的永远是多项式函数和幂函数.*

问题 6 (补充题)**.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

问题 7 (补充题)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

问题 8 (补充题)**.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right)$.

1.2　间断点: 习题一第 20 题

定义 1. 连续点, 间断点, 第一类间断点, 第二类间断点, 可去间断点, 跳跃间断点, 无穷间断点.

注 3. *根据定义, 要判断一个点是连续点还是间断点, 必须充分考虑它在定义域里的位置. 特别地, 如果定义域是分段区间, 而要考虑的点只是一个区间的端点, 只需要看单侧连续性, 这时不可能是跳跃间断点.*

问题 9 (习题一第 20 题第 (7) 问). 指出函数 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 的连续区间和间断点类型.

问题 10 (习题一第 20 题第 (8) 问). 指出函数 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间和间断点类型.

1.3 最值定理与中间值定理在证明题中的运用: 习题一第 22 题

定理 1 (最值定理). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到它的最大值和最小值.

定理 2 (中间值定理). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值.

推论 1 (零点存在性). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上满足 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有零点.

推论 2 (值域连续性). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到最大值与最小值之间的一切值, 因而其值域必为一个连续区间.

问题 11 (习题一第 22 题第 (2) 问). 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且无零点, 则 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

正确写法 1. 反证法. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0, f(d)<0$. 不妨设 $c<d$, 由中间值定理, 存在 $\xi\in[c,d]$ 使得 $f(\xi)=0$, 与 f 无零点矛盾. 故原结论成立. □

正确写法 2. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 且由中间值定理的推论, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到 $[m,M]$ 中的一切值. 由于 f 无零点, 故 $0\notin[m,M]$, 即 $m>0$ 或 $M<0$, 即 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$. □

错误写法 1: 这也要证. 因为 $f(x)$ 没有零点, 所以 $f(x)\neq 0$, 所以 $f(x)>0$ 或者 $f(x)<0$. □

错误写法 2: 记号重复. 假设结论不成立, 则存在 a,b 使得 $f(a)>0, f(b)<0$. □

错误写法 3: 依据不足. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 由于 f 无零点, 所以 $m>0$ 或 $M<0$. (一定要写出能取到 $[m,M]$ 中一切值) □

不严谨的写法 1: 欠缺讨论. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0, f(d)<0$. 由中间值定理, 存在 $\xi\in[c,d]$ 使得 $f(\xi)=0$. (为什么 $c<d$) □

不严谨的写法 2: 逻辑跳步. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0, f(d)<0$. 由中间值定理, 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$. (直接的逻辑关系是 $\xi\in[c,d]$ 而不是 $[a,b]$) □

2 第四次作业选讲

2.1 可导的定义: 习题二第 3 题

问题 12 (习题二第 3 题). 若下面的极限都存在, 判别下式是否正确.

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$;

(2) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0)$.

注 4. *本题考查的实际上是判断函数在一点处是否可导的等价方式，即左边的极限存在是否能判断 f 在 x_0 处可导，且导数等于该极限值．因此作答时不能事先假定 $f'(x_0)$ 存在，甚至很多同学写的分类讨论 f 在 x_0 处是否可导也是不严谨的．*

错误解答．

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\ =&f'(x_0).\end{aligned}$$

□

注 5. *运用极限的四则运算法则时，必须时刻注意，经过转化之后的表达式是否还存在极限．*

不严谨的解答． 分类讨论: 当 f 在 x_0 处可导时正确, 理由如下:

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\ =&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\ =&f'(x_0).\end{aligned}$$

当 f 在 x_0 处不可导时错误. □

注 6. *这里有一定的逻辑问题: 必须要说明左边的极限存在能推出 f 在 x_0 处可导，或者存在一个反例使得左边的极限存在但是 f 在 x_0 处不可导，否则实际上并没有解决这道题．*

正确解答． (2) 的结论是错误的. 取 $f(x)=|x|$, $x_0=0$, 则左边的极限存在:

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\ =&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-|\Delta x|}{2\Delta x}=0.\end{aligned}$$

但是 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处不可导, 原式不正确. □

注 7. *一个本质的问题在于，函数在某一点处的可导性与该点处的取值密切相关，而函数在某一点处的极限与该点处的取值无关．所以事实上我们可以任取一个可导函数，修改其在一个点处的取值，得到的新的函数就不满足 (2)，因为修改这个取值后左边极限不变，但右边导数就不存在了 (在该点处甚至不连续)．*

2.2 判断分段函数可导性: 习题二第 10 题

问题 13 (习题二第 10 题)**.** *判断函数* $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le 1\\ 2x+3 & x>1\end{cases}$ *在 $x=1$ 是否可导．*

错误写法 1: 分不清左右极限和左右导数. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1+1=2$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2+3=5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

错误写法 2: 还是分不清左右极限和左右导数. $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1+1=2$, $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2+3=5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

注 8. *以上两种错误都是意识到了函数在 1 处不连续, 所以不可导, 但是写法有问题.*

正确解答 1. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1+1=2$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2+3=5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右极限不相等, 不连续, 所以不可导. □

错误写法 3: 左右导数求法不对. $f'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{(1+\Delta x)^2+1-2}{\Delta x}=2$, $f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{2(1+\Delta x)+3-5}{\Delta x}=2$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数相等, 所以可导. □

注 9. *这里看起来出现了矛盾: 一方面根据前面的讨论 f 不连续, 所以不可导; 另一方面直接计算左右导数似乎又是相等的, 符合导数存在的定义. 这里的问题出在计算左右导数时代入的 $f(1)$ 函数值有问题, 算左导数代入了 2, 算右导数却代入了 5.*

2.3 隐函数求导

问题 14 (习题二第 13 题)**.** *求以下方程所确定的隐函数的导数:*

(1) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, *(2)* $\cos(xy)=x$,

(3) $y=1+xe^y$, *(4)* $x^y=y^x$.

错误解答. (2) $y=\dfrac{1}{x}\arccos x$, $y'=-\dfrac{1}{x^2}\arccos x-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. □

正确解答. (2) $-\sin(xy)(y+xy')=1, y'=\dfrac{1}{x}\Big(-\dfrac{1}{\sin(xy)}-y\Big)$. □

注 10. *有些同学喜欢将方程决定的隐函数求出来然后直接求导, 但是首先大部分情况这是解不出来的, 其次隐函数的唯一性并不是一件显然甚至正确的事情, 比如 (1)(2) 中的隐函数都不唯一, 所以解出来的结果并不严谨, 我们应该掌握直接对隐函数求导的办法.*

注 11. *一般来说隐函数求导的结果会带有自变量 x 和隐函数 y 本身, 而 y 本质上又是 x 的函数, 所以经过不同的化简方式会得到形式上不同的表达式. 这是非常自然的, 只要求导过程正确, 一定可以证明这些表达式是等价的, 因此不需要刻意追求形式的简化, 求出来之后直接下结论即可.*

问题 15 (习题二第 18 题)**.** *若 $x+2y-\cos y=0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.*

错误解答. 对 x 求一阶导: $1+2y'+\sin y\cdot y'=0$, 故 $y'=-\dfrac{1}{2+\sin y}$. 两边再对 x 求导得: $y''=\dfrac{\cos y}{(2+\sin y)^2}$. □

注 12. *必须时刻牢记 y 是关于 x 的函数, 很多同学上一题可以做对, 这题求一阶导也都求对, 但是求第二次导数的时候就忘记再乘一个 y', 实际上第二次变成了对 y 求导. 一个可能有帮助的办法是在计算的过程中不写 y, 而是写 $f(x)$, 可以提醒自己这一项也是关于 x 的函数. 但是卷子上最后的结果必须写成带有 y 的形式.*

问题 16 (补充题)**.** *设 u,v,w 关于 x 二阶可导, 令 $y=\arctan\dfrac{u}{vw}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.*

3 补充内容: 中值定理的应用

问题 17. 设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a.b)$ 上可导, 且 $g(a)=0$, 满足 $|g'(x)| \leq \frac{1}{2(b-a)}|g(x)|$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立. 证明: $g(x)=0, \forall x \in [a,b]$.

问题 18 (导函数的介值性)**.** 设函数 $g(x)$ 可导, 且存在 $a < b$ 满足 $g'(a) < g'(b)$. 证明: 对任意 $\eta \in (g'(a), g'(b))$, 存在 $c \in (a,b)$ 使得 $g'(c) = \eta$.

注 13. 世界上的函数千奇百怪, 我们常见的包括初等函数、分段初等函数、幂指函数等等都是性质非常好的, 也就是在除了有限个点之外其他地方无穷次可导. 但是在做抽象的证明题的时候, 一定要记住不能凭空增加条件, 比如上题不能想当然认为 $g(x)$ 的导函数一定是连续的.

4 祝大家考试顺利!

2024 秋高等数学 D 第三次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 11 月 12 日

1　第五次作业选讲

1.1　洛必达法则的应用

问题 1 (习题三第 9 题)**.** *求下列各极限, 并指出能否使用洛必达法则? 为什么?*

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$*;*　*(2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

注 1. *我们回顾洛必达法则的适用条件: 如果极限* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *是* $\dfrac{0}{0}$ *型或* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *型未定式, 不能直接通过连续函数代入的方法求出极限, 则可以对上下同时求导, 如果此时得到的极限存在, 则原极限也存在且极限值相等. 以上的条件缺一不可.*

错误解答 1: 判断错误. 题中函数分子分母在定义域内都可导, 且所求极限都是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 所以可以使用. □

错误解答 2: 理由错误. 部分同学的判断正确, 但是说明的理由有误.

· 不能使用, 因为 $1-\cos x$ 和 $1+\cos x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡/没有极限/不能确定/分母可能为 0.

· 不能使用, 因为分子分母在定义域内不是处处可导.

· 不能使用, 因为 $\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡. □

注 2. *另外, 本题还需要算出这两个极限, 请大家平时作业注意读题, 否则考试在这里吃亏非常可惜.*

问题 2 (习题三第 8 题 (4) 问)**.** $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\cot x}{\ln x}$.

注 3. $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$*, 因此本题答案为* $-\infty$*, 课后答案有误.*

错误解答: 这也能洛吗. 对洛必达法则的使用错误.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{\ln x\cdot\tan x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=0.$$ □

正确解答. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0+0}-\dfrac{x}{\sin^2 x}=-\infty.$ □

问题 3 (习题三第 8 题 (6)(14) 问)**.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$*;*　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}$.

错误解答: 只洛一次吗. 用完一次洛必达法则后发现分子代入为 0, 就直接下结论.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}=0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\frac{\tan(x-1)}{\cos(\pi x/2)}=0.$$ □

正确解答. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=3\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin 2x}{-\sin 6x}=\dfrac{1}{3}.$ □

正确解答. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\tan(x-1)}{\cos(\pi x/2)}=-\dfrac{4}{\pi^2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\cos^2(x-1)\sin(\pi x/2)}=-\dfrac{4}{\pi^2}.$ □

问题 4 (习题三第 8 题 (10)(12) 问)**.** *$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$; $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{5x}}$.*

注 4. 这两道题都是典型的多项式/指数型的极限, 本质上是要利用指数函数求导不变, 而多项式有限次求导为 0 的性质去多次运用洛必达法则. 在书写过程的时候, 我们要将这个多次求导的过程展现出来, 不能笼统地写大白话. 对于 *(10)* 问这种变形的结构, 还要找到合适的转化方法.

错误解答. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{100x^{99}}=...=0.$ □

注 5. 如果直接对原来的函数上下求导, 由于分子会创造出来一个 $\dfrac{2}{x^3}$, 其中的 x^3 会乘到分母上去, 所以分母的多项式次数反而会不断增大, 这样最后是得不到答案的. 这也是大家一定要把每次求导之后的结果写清楚的原因.

正确解答. 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}=...=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0.$ □

正确解答. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{5e^{5x}}=...=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{5^n e^{5x}}=0.$ □

1.2 罗尔定理的应用

问题 5 (习题三第 1 题)**.** *设 $f'(x)=a$, 试证: $f(x)=ax+b$.*

注 6. 本题严格的写法应该用罗尔定理的推论, 有些同学解答中写: 函数的变化率不变, 所以是一次函数. 这不是严谨的数学解答.

问题 6 (习题三第 6 题, 第 7 题)**.** *用中值定理证明下面各等式:*

(1) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

若 $|x|\le1$, 证明 $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$.

注 7. 本题考查的是通过求导等于 0 来证明某个函数为常函数, 进而通过代入特殊值得到其函数值. 有的同学利用反三角函数的定义, 使用几何法来书写证明, 但这里没有交代 $x>0$, 用它来表示某个直角三角形的边长是不严谨的.

2 单调, 极值, 最值, 凹凸

注 8. 回顾我们在第一次习题课上提到的, 高等数学课程的主要内容就是通过连续, 导数, 积分这三个工具, 研究常见函数的性质. 连续函数的最本质的性质就是最值定理和中间值定理及其推论, 而当我们有了可导性之后, 就可以研究一系列新的性质, 这就是课本第三章最后两节的内容.

问题 7. *判断以下说法是否正确:*

(1) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(2) 可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(3) 可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x)>0$ 在 (a,b) 上除有限个点外都成立.

(4) 函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

(5) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

(6) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取到极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$.

(7) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义, $x_0\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则存在 x_0 的邻域 U, 使得 $f(x)$ 在 x_0 处取到 U 上的最值.

(8) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数的充要条件是 $f''(x)<0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(9) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数的充要条件是对任意 $x,y\in(a,b)$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$, 都有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

第 (9) 问的证明. 本题的条件实际上是说: 在开区间 (x,y) 上的任意一点 z, 过 z 作平行于 y 轴的竖直直线, 与 $f(x)$ 和 $f(y)$ 的连线交于一个点 P, 那么 P 必然在 $f(z)$ 的上面. 也就是" 等分点的函数值 < 函数值的分点". 同学们可以画图理解一下.

若 $f(x)$ 是凸函数, 令 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, 则过 $(z,f(z)$ 作函数的切线得到的方程是 $y=f'(z)(x-z)+f(z)$. 根据定义, 函数图像在这条切线的下面, 因此在横坐标 x,y 处分别有:

$$f(x)<f'(z)(x-z)+f(z), \tag{1}$$

$$f(y)<f'(z)(y-z)+f(z). \tag{2}$$

将(1)乘上 λ, (2)乘上 $1-\lambda$, 两式相加得到:

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)<f(z).$$

即为 (9) 中所给的条件.

反之, 若 (9) 中所给的条件成立, 我们希望证明对任意的 z, 函数过 $(z,f(z))$ 的切线在函数图像的上面. 任取 $x<z$, 对任意的 $y>z$, 令 $\lambda=\dfrac{y-z}{y-x}$, 则可以直接验证 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. 于是

$$f(z)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

变形得到:

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z}<\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{f(z)-f(x)}{y-z}.$$

根据 λ 的定义, 右边等于 $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$. 而左边令 $y\to z$ 我们得到

$$f'(z)\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

变形即可得到 $f(x)\le f'(z)(x-z)+f(z)$, 也就是 $(x,f(x))$ 在过 $(z,f(z))$ 的切线的下面. 所以函数是凸的. □

2024 秋高等数学 D 第四次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 11 月 26 日

1　第七次作业选讲

1.1　不定积分的基本概念

定义 1. 函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)(x \in X)$ 的一个原函数, 如果对 $\forall x \in X$, 都有 $F'(x) = f(x)$.

定义 2. 函数 $f(x)$ 的不定积分是指它的全体原函数, 记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

命题 1. 如果 $F(x)$ 是 $f(x)(x \in X)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

思考 1. 常见函数的原函数必须烂熟于心, 至少要马上反应出怎么算:

$$1, x^\alpha, a^x, \sin x, \cos x, \tan x, \frac{1}{a+bx^2}, \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}, \ln x.$$

思考 2. 我们要在什么样的区间上求出 $F(x)$: 如果 $f(x)$ 的定义域是分段区间, 在每个区间上可导, 那么我们也应当在每个区间上求出原函数 $F(x)$. (例子: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 或 $f(x) = \ln(x^2-1)$.) 必要的时候要进行分类讨论, 但一般情况下不需要在答案中强调定义域, 除非结果不能统一成一个形式.

思考 3. 求不定积分或者求原函数本质上是求导的逆运算, 所有的计算方法都要服从于求导法则, 如两个换元法和分部积分法, 分别来源于复合函数求导的链式法则和函数乘积的求导公式. 不能自己想当然地创造积分方法.

问题 1 (习题四第 3 题第 (5)(6) 问). *(5)* $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.　　*(6)* $\int \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

奇怪的思路. 想要求出 $f(x)$ 的一个原函数, 先凑一个感觉上求导之后差不多的 $F(x)$, 算出来发现 $F'(x) = f(x)g(x)$, 多了一个乘积因子 $g(x)$, 于是直接得出 $F(x)/g(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

$$(5) \int \tan^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\tan^3 x \cos^2 x + C.$$

$$(6) \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{2x} + C.$$

□

注 1. 既然求不定积分是求导的逆运算, 那么一方面想要快速准确地算好积分, 就要对求导运算非常熟练, 另一方面也总可以通过求导来验算自己是否算对了.

注 2. 根据定义, 不定积分是全体原函数, 所以会有我们老生常谈的 $+C$ 问题. 一定要注意因为这个 $+C$ 的存在, 所以前面求出的原函数在相差一个常数的情况下都是对的:

$$\frac{1}{5}\arcsin 5x + C = -\frac{1}{5}\arccos 5x + C.$$

换句话说, 原函数有无穷多个, 我们写出来的时候只是挑了一个作为代表元, 那么自然也有无穷多种挑法. 所以不定积分的结果从形式上看肯定有多种写法.

1.2 换元法的运用

定义 3. 换元法实际上都是利用复合函数求导的链式法则, 来达到简化被积函数的目的. 第一换元法侧重于从被积函数中"删掉"一些多余的项, 需要对微分的写法比较熟练:

$$a\mathrm{d}x = \mathrm{d}(ax+b), \quad x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2), \quad e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}e^x, \quad \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x.$$

第二换元法侧重于往被积函数中"添加"一些新的项. 最常见的是三角换元, 可以帮我们去掉根号.

注 3. 三角换元 $x = \sin t$ 等虽然是很有效的工具, 但是由于三角函数的周期性, 我们对反三角函数是有值域的限制的:

$$\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \arccos x \in [0, \pi), \quad \arctan x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

如果不加以说明, 换元之后变量 t 的取值范围就可能有歧义, 也容易在后面的计算中误导自己, 因此希望大家都要写出 t 的取值范围. 特别地, 因为原来的积分变量 x 一般来说不是正数, 所以不要通过画直角三角形的方式来说明.

问题 2 (习题四第 4 题第 (17) 问)**.** $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x.$

错误解答. 令 $x = a\sec t$, 则 $\mathrm{d}x = a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \cos t \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t \\ &= a\int \tan^2 t\mathrm{d}t \\ &= a(\tan t - t + C).\end{aligned}$$

又 $t = \arccos\frac{a}{x}$, $\tan t = \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

□

注 4. 本次作业几乎所有同学本题都是采用以上的写法, 问题就出在换元之后的第一步变换, 因为 t 的取值范围是 $[0, \pi)$, 对应地 $\tan t$ 有正负两种取值, 分别对应 x 的正负两种取值, 所以拆开根号之后实际上得到的是 $|\tan t|$. 这时就需要分类讨论, 得到的结果也是分段的, 当然可以从形式上将其合并, 但这是三角换元常见的问题.

注 5. *之所以强调求完积分之后要求导验算, 就是因为这里如果进行一步验算就会发现, 当 $x<0$ 的时候这个结果求导后不等于原来的被积函数.*

正确解答 *1.* 令 $x=a\sec t,\ t\in[0,\pi)$, 则 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 当 $x>a$ 即 $t\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int\cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int\tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= a(\tan t-t+C).\end{aligned}$$

又 $t=\arccos\frac{a}{x}$, $\tan t=\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

当 $x<-a$ 即 $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int\cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int-\tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= -a(\tan t-t+C).\end{aligned}$$

又 $t=\arccos\frac{a}{x}$, $\tan t=-\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}+a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

综上, 所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C.$$

$\square$

正确解答 2.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-a^2}{x^2}\mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2} \\
&= \int \frac{t^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t \quad (t=\sqrt{x^2-a^2}) \\
&= a\int \frac{y^2}{y^2+1}\mathrm{d}y \quad (t=ay) \\
&= a(y-\arctan y+C) \\
&= t-a\arctan\frac{t}{a}+C \\
&= \sqrt{x^2-a^2}-a\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C.
\end{aligned}
$$

□

1.3 分部积分的运用

定义 4. 分部积分实际上是利用函数乘积的求导公式导出的方法，是最常见的处理复杂积分的方式. 尤其如果被积函数中出现对数函数 $\ln x$, 反三角函数 $\arctan x, \arcsin x, \arccos x$ 等求导之后可以变成多项式的函数, 或者出现指数函数 e^x, 三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x$ 等求导有不变性质或循环性质的函数, 用一到两次分部积分会有很大的作用.

问题 3. 求不定积分:

$$\int x^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

2 不定积分补充习题

问题 4 (正态分布)**.** 求不定积分:

$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

问题 5 (观察换元)**.** 求不定积分:

$$\int x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

问题 6 (有理函数)**.** 求不定积分:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x.$$

问题 7 (分部积分)**.** 求不定积分:

$$\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

问题 8 (万能代换)**.** 求不定积分:

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

问题 9 (综合运用)**.** 求不定积分:

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x.$$

3 定积分

3.1 定积分的基本概念

定义 5. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界, 如果存在一个常数 I, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意一个 $[a,b]$ 上的分割 $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ 和任意的中间值 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 只要 $\max|x_i-x_{i-1}|<\delta$, 就有

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I\Big|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, I 称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 6. 以前我们往往觉得, 定积分不过就是不定积分加上了积分上下限, 只要能求出原函数, 代入两个值作差就得到定积分, 所以问题的关键在于求出原函数. 但是通过以上的定义我们会发现, 定积分的定义本质上是与所谓求导逆运算完全无关的, 之所以可以和不定积分关联起来, 是根据牛顿-莱布尼兹法则得出的.

而且我们也很容易发现, 许多函数是可积的, 却无法求出原函数, 所以它们无法被计算不定积分, 但是在特定区间上的定积分却是可以计算的. 从这个角度上看, 不定积分只是一种运算, 而定积分才是揭示函数整体性质的本质工具.

3.2 变限积分

定义 6. 定积分的第一个作用就是为我们提供了构造原函数的方法. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 定义 $f(x)$ 的变上限积分为

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

变下限积分为

$$G(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

则变上限积分和变下限积分的求和是一个定值: $F(x)+G(x)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

命题 2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.

注 7. 从原函数的角度来看, 变上限积分的积分下限不一定要取成 a, 而是可以取成任意的一个固定点, 因为这样的变换只会让 $F(x)$ 变化一个常数, 求导之后不变, 也就是都是 $f(x)$ 的原函数. 一般取成区间左端点是因为习惯让积分上限大于等于积分下限.

问题 10. 求函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 11. 求极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{x^2}.$$

问题 12. 求函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^{2\ln x} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$ 的导数.

问题 13. 求极限:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_0^{2\ln x}\frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t}{(x-1)^2}.$$

问题 14. 求函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^{2\ln x} tx\mathrm{d}t$ 的导数.

3.3 定积分计算极限

定义 7. 在实际题目中,我们基本上不会遇到不可积的函数,也不会要求用定义验证一个函数是否可积.但是反过来根据定积分的定义,往往可以解决一系列求和形式的极限.

问题 15.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{n+i}{n}.$$

问题 16.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{i}{n}.$$

问题 17.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}.$$

10. $F'(x) = \frac{\sin x}{x+1}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x+1}}{2x} = \frac{1}{2}$.

12. $F'(x) = \frac{\sin(2\ln x)}{2\ln x+1} \cdot \frac{2}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\int_0^{2\ln x} \frac{\sin t}{t+1}dt}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{\sin(2\ln x)}{2\ln x+1}}{2(x-1)} \cdot \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(2\ln x)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(2\ln x)}{2\ln x} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1} = 2$.

14. ① $F'(x) = 2\ln x \cdot x \cdot \frac{2}{x} + \int_0^{2\ln x} t\,dt = 4\ln x + 2(\ln x)^2$

② $F(x) = x\int_0^{2\ln x} t\,dt = 2x(\ln x)^2 \Rightarrow F'(x) = 2(\ln x)^2 + 4\ln x$.

($F(x) = \int_0^{g(x)} f(t,x)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(g(x),x)\cdot g'(x) + \int_0^{g(x)} \boxed{\frac{d}{dx} f(t,x)}\,dt$.)

把t当作常数，只对x求导.

2024 秋高等数学 D 第五次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 12 月 10 日

1　多元函数及其极限

1.1　多元函数的基本概念

定义 1 ($\mathbb{R}^2$ 中的距离). 设 P, Q 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标分别为 $P(x_1, x_2), Q(y_1, y_2)$, 则定义 P 与 Q 之间的距离为

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}.$$

定义 2 ($\mathbb{R}^n$ 中的距离). 设 P, Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 坐标分别为 $P(x_1, ..., x_n), Q(y_1, ..., y_n)$, 则定义 P 与 Q 之间的距离为

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

注 1. 我们考虑这样定义的 $\mathbb{R}^2$ 中两点的距离和它们各自分量之间的距离 (一维实轴上的距离) 的关系: 一方面, P, Q 的距离可以控制它们各自分量之间的距离:

$$|x_1 - y_1| \le d(P,Q), \quad |x_2 - y_2| \le d(P,Q);$$

另一方面, 它们各自分量之间的距离的整体可以控制 P, Q 之间的距离:

$$d(P,Q) \le |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

这里的所谓控制是一个重要的数学思想, A 能控制 B 的意思就是我们可以用 A 的大小去盖住 B 的大小, 如果它们能相互控制, 那么估计其中一个的范围就能给出另一个的范围. 这时我们称这两个东西等价, 数学上我们不区分相互等价的东西.

定义 3 ($\mathbb{R}^2$ 中的邻域). 设 P 为 $\mathbb{R}^2$ 中的点, 坐标为 $P(x_1, x_2)$, 则定义 P 的 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘, 即下面的点集:

$$U_\delta(P) = \{Q = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} < \delta\}.$$

定义 P 的空心 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的圆盘去掉 P 点, 即下面的点集:

$$U_\delta(\bar{P}) = \{Q = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} < \delta\}.$$

定义 4 ($\mathbb{R}^n$ 中的邻域). 设 P 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 坐标为 $P(x_1,...,x_n)$, 则定义 P 的 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的开球, 即下面的点集:

$$U_\delta(P)=\{Q=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n|d(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2<\delta}\}.$$

定义 P 的空心 δ-邻域为以 P 为圆心, δ 为半径的开球去掉 P 点, 即下面的点集:

$$U_\delta(\bar{P})=\{Q=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n|0<d(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2<\delta}\}.$$

注 2. 前面提到过, 两点之间的高维距离和各自分量的一维距离可以相互控制, 反映在邻域上就是: 一方面, P 的邻域限制在两条坐标轴上, 一定会分别包含以对应分量 x_1,x_2 为中心的一个开区间; 另一方面, 以 x_1,x_2 为中心的两个开区间作乘积得到的矩形, 一定会包含 P 的一个邻域.

定义 5 (二元函数极限的两种等价定义). 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个空心邻域内有定义, 对于常数 A, 称 A 为 $f(x,y)$ 在 P 点处的极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,$$

如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $(x,y)\in U_\delta(\bar{P})$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$. 等价地, 极限的定义也可以换成当 $x\in U_\delta(x_0),y\in U_\delta(y_0),(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时, 总有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.

注 3. 两者的等价性正是来源于上面提到的两种邻域的等价性. 第一种定义是说, 只要自变量落在充分小的圆盘邻域内, 函数值就充分接近; 第二种定义则是换成了方形邻域. 但是前面已经提过, 这两种邻域是等价的, 因为任意小的圆盘邻域内都包含充分小的方形邻域, 反之亦然.

定义 6. 多元函数极限的四则运算法则, 保号性, 夹逼定理, 复合法则, 以及多元函数连续与间断的定义, 与一元函数完全相同.

1.2 多元函数极限计算

注 4. 计算多元函数的极限更多地就是使用定义本身来验证, 而且验证的过程并不容易, 要时刻记住”路径任意”这件事情. 我们通过一个一般的例子来说明这件事情的重要性.

问题 1. 对任意连续函数 $f(x)$, 满足 $f(0)=0$ 且当 $x\neq0$ 时 $f(x)\neq0$, 则二元函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)y}{f(x)^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

沿路径 $(x,f(x))$ 趋于原点时恒等于 $1/2$, 沿路径 $(x,0)$ 趋于原点时恒等于 0, 因此在原点处不连续.

注 5. 在一元函数的极限计算中, 我们最喜欢的是 x 以及其他多项式, 并经常以它们为基准衡量其他函数的增长或者衰减速度, 如无穷小量替换 $\ln(x+1),e^x,\sin x$ 等等. 这主要是因为, 验证函数极限就是说明函数值之间的距离与自变量之间的距离存在一些关系: 当自变量之间距离充分小的时候, 函数值之间距离

也可以充分小. 以研究 $x \to 0$ 的极限过程为例: $|x|$ 就代表了 x 到原点的距离, 也就是自变量之间的距离, 如果能将 $f(x)-f(0)$ 也转化成多项式, 就可以通过 $|x|$ 同时沟通自变量之间和函数值之间的距离.

现在变成二元函数的情况下, 自变量之间的距离变成了 $\sqrt{x^2+y^2}$, 所以相应地我们也要把函数值转化为跟 x^2+y^2 直接相关的量. 常用的就是均值不等式:$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 进一步, 对任意的 $\alpha, \beta \ge 0$, $|x^\alpha y^\beta| \le C(x^2+y^2)^{(\alpha+\beta)/2}$. 如果出现其他初等函数, 可以先用一元的无穷小量替换: $\ln(1+xy), \sin(x+y)$ 等等. 极坐标换元 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 也是常用的办法, 将问题转化为一元极限 $r \to 0$.

问题 2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2).$$

问题 3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),\ \text{其中} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} & x \ne 0 \\ y & x = 0 \end{cases}.$$

问题 4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

注 6. 对于多元函数来说, 如果想证明极限不存在其实是比较容易的, 只需要观察函数的特征然后取两条特定的路径即可, 一般来说这样的路径可以简化函数的形式.

问题 5. 判断下面极限是否存在:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

问题 6. 已知一元函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 可导, 且导函数 $f'(x)$ 连续, $a \in \mathbb{R}$, 求极限:

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} g(x,y),\ \text{其中} g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & x \ne y \\ f'(x) & x = y \end{cases}.$$

思考 1. 对于二元函数 $f(x,y)$ 和点 $P(x_0,y_0)$, 我们还可以定义如下的累次极限:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

累次极限和我们定义的二元函数的极限之间有什么关系? 累次极限交换对 x 和 y 的求极限顺序是否会变化? 什么情况下我们可以说二元函数极限等于累次极限?

2 多元函数的偏导数与全微分

2.1 偏导数

定义 7 (偏导数与可导性)**.** 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 则 $g(x) \triangleq f(x,y_0)$ 是在 x_0 的某个邻域内有定义的一元函数. 如果 $g(x)$ 在 x_0 处可导, 则称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处存在对 x 的偏导数, 并记为

$$f'_x(x_0,y_0) = g'(x_0).$$

偏导数的记号有时也写成 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 或 $\partial_x f(x_0,y_0)$. 如果二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处对 x,y 的偏导数都存在, 则称 $f(x,y)$ 在 P 处可导.

注 7. 从定义中可以看出, 多元函数的偏导数只反映函数在经过该点的某条坐标轴上的性质, 而无法刻画坐标轴之外的点处函数的性质, 所以对于多元函数而言不存在"可导 $\Rightarrow$ 连续"这一准则. 一般地, 可导的条件甚至无法给出该点任意邻域内的性质, 即使是"可导 $\Rightarrow$ 有界"都是错误的.

注 8. 多元函数偏导数的计算本质上是一元函数的求导, 因此只要熟练掌握了一元函数的求导, 并且弄清楚哪些字母是自变量, 哪些字母是因变量, 偏导数的计算就易如反掌. 在处理隐函数求偏导问题时, 一定要分清楚自变量和因变量.

问题 7. 设 $f(x,y)=xy+\sin(x^2+y^2)-\dfrac{\sqrt{x}}{\ln y}$, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

问题 8. 设 $z=z(x,y)$ 是由以下方程决定的隐函数: $xyz+\sin(x^2+y^2+z^2)-\ln(xz+yz^2)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

问题 9. 证明: 以下定义的函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},\quad x\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}^+$$

满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.2 全微分

注 9. 前面已经提到过, 对于多元函数来说, 偏导数只能反映函数在坐标轴上的信息, 那么自然我们需要一个更强的条件, 能够刻画函数在整个邻域里面的信息, 并且这个性质是比连续性更好的, 就像一元函数里面一样. 这就需要考虑一元函数的导数的本质: 即函数在一点附近, 函数值之间的距离和自变量之间的距离近似有线性关系 $\Delta y=f'(x)\Delta x$. 这个定义可以自然拓展到多元的情况.

定义 8 (全微分与可微性)**.** 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 如果存在常数 A,B 使得

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

则称 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处可微, 并记 f 在 P 处的全微分为

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

注 10. 根据定义可以直接得到"可微 $\Rightarrow$ 连续", 而在定义式中令 $\Delta y=0$, 两边同时除以 Δx 并令 $\Delta x\to 0$, 就得到 f 在 P 处对 x 存在偏导数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=A$. 同理有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=B$. 所以"可微 $\Rightarrow$ 可导". 由以上结果也可以看出, 求函数的全微分本质上就是求函数的偏导数, 因此计算上也是简单的.

注 11. 可微 $\Rightarrow$ 连续, 可微 $\Rightarrow$ 可导, 可导 + 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微, 连续和可导互相不能推出.

定义 9 (复合函数微分)**.** 设二元函数 $z=f(u,v)$, 且 u,v 均为关于 x,y 的二元函数: $u=g(x,y),v=h(x,y)$, 则 z 也可以写成关于 x,y 的二元函数: $z=f(u,v)=f(g(x,y),h(x,y))\triangleq F(x,y)$. 以下等式成

立:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}.$$

注 12. 如果习惯微分的写法, 以上等式其实是比较自然的:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\Big) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \Big(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y\Big).$$

按照 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的系数整理一下就得到上面的等式.

思考 2. 在必要的时候, 一定要区分 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 设二元函数 $z = f(x, y)$, 且 $y = g(x)$ 为关于 x 的函数, 则 z 也可以写成关于 x 的函数: $z = f(x, g(x))$. 如何计算 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$? 它等于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 吗?

2024 秋高等数学 D 第六次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 12 月 24 日

1　多元函数条件极值

定义 1 (拉格朗日乘数法)**.** 为求二元函数 $z = f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的极值点, 构造辅助函数 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$, 则极值点所满足的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = 0.$$

注 1. 如果涉及到三元及以上的函数, 有可能有多个约束条件, 一般的情况是多元函数 $y = f(x_1,\ldots,x_n)$, 约束条件 $\varphi_1(x_1,\ldots,x_n) = 0,\cdots,\varphi_k(x_1,\ldots,x_n) = 0$. 此时我们构造的辅助函数是

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = f(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi_i(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

极值点所满足的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \varphi_j(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

尽管形式上更加复杂, 但思想方法是一致的, 即使看到多元函数或者多个约束条件也不用担心无法处理.

注 2. 拉格朗日乘数法/拉格朗日乘子法所给出的只是极值点的必要条件, 通常情况下如果解出了唯一解, 题目也是要求极值点, 则可以不必额外验证. 如果解出来的解不唯一, 且它们对应的函数值不同, 则有可能需要排除掉一些. 回忆如何证明一个点不是极值点: 要说明 P 不是极小值点, 则要说明在 P 的任意小邻域内, 都存在满足约束条件的点 Q 使得 $f(Q) < f(P)$. 换言之, 即存在一列点 P_k 趋于 P, 且 $f(P_k) < f(P)$ 对每个 k 均成立.

注 3. 求解拉格朗日乘数法给出的方程组有时并不容易, 特别是如果多元函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 中包括复杂的乘积结构, 则求完偏导之后依然包含其他变量. 当然其中一个方法是利用约束条件或者其他变形技巧可以简化这一结果, 不过有时候可以通过取对数的方式进行简化, 因为当 $f(x_1,\ldots,x_n) > 0$ 时, f 的极值点和 $\ln f$ 的极值点总是一样的. 这个方法同样也适用于一般极值的求法.

问题 1 (习题五第 17 题)**.** 当 n 个正数 $x_1,\cdots,x_n$ 的和为常数时, 求它们乘积开 n 次根的最大值.

方法 1. 设 $\sum_{i=1}^{n}x_i = a$, 则要求极值的多元函数为 $f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}x_i$, 约束条件为 $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}x_i - a = 0$. 考虑构造的辅助函数 $F(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}x_i -$

$\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j}\prod_{i=1}^{n} x_i - \lambda = 0.$$

故 $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n} x_i$. 结合 $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ 得到 $x_i = \frac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\frac{a}{n}$. □

方法 2. 设 $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, 注意到 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 取到最大值等价于 $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ 取到最大值, 则要求极值的多元函数为 $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$, 约束条件为 $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - a = 0$. 考虑构造的辅助函数 $F(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j} - \lambda = 0.$$

故 $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\lambda}$. 结合 $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ 得到 $x_i = \frac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\frac{a}{n}$. □

问题 2 (习题 5 第 13 题第 (2) 问)**.** *求函数 $u = xyz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ 下的极值.*

证明. 由于 (x,y,z) 满足约束条件等价于 $(-x,-y,-z)$ 满足约束条件, 且它们对应的 u 互为相反数, 故 u 的极大值即为 $|xyz|$ 的极大值, 极小值即为其相反数. 同样可以采用取对数法, 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu) = \ln|x| + \ln|y| + \ln|z| - \lambda(x^2+y^2+z^2-1) - \mu(x+y+z)$, 求偏导得到

$$\frac{1}{x} - 2\lambda x - \mu = 0, \qquad \frac{1}{y} - 2\lambda y - \mu = 0, \qquad \frac{1}{z} - 2\lambda z - \mu = 0.$$

三式分别乘上 x,y,z 求和得到 $\lambda = \frac{3}{2}$. 代入得 $\frac{1}{x} - 3x = \frac{1}{y} - 3y = \frac{1}{z} - 3z$. 因式分解得到 $x = y$ 或 $xy = -\frac{1}{3}$, 对 y,z 和 z,x 也同理. 由于不可能 $x = y = z$, 故必然是两个相等且与第三个乘积为 $-\frac{1}{3}$. 不妨设 $x = y = -\frac{1}{3z}$, 代入得 $x = y = -\frac{1}{\sqrt{6}}, z = \frac{2}{\sqrt{6}}$ 或者 $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}, z = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, 分别对应极大值和极小值. 所有的极值点即为以上坐标的全部轮换. □

注 4. *不用取对数法也可以类似地证明, 但个人感觉计算会麻烦一些, 详见参考答案. 对于这种三个变量具有完全对称地位的函数和约束条件问题, 通常来说会得到 x,y,z 同时满足某个相同的方程, 这时可以考虑利用韦达定理. 但是不能由此认为 $x = y = z$.*

注 5. *对于约束条件没有通过明显的表达式给出的情况, 需要自行转化, 这时需要仔细阅读题目中给出的约束条件, 列出正确的表达式. 习题五第 14 题中的长方体是半球内接, 许多同学当作球内接来做, 会得到错误的约束条件和结果.*

2 多元函数偏导与微分回顾

注 6. 多元函数的偏导数求法, 本质上同一元函数的求导相同, 只要记住把其他的变量都当成无关的常数系数, 然后自然运用一元函数的求导法则就可以了.

问题 3 (习题五第 3 题第 (5) 问)**.** 求函数 $z = e^{xy} + yx^2$ 的偏导数.

注 7. 多元函数的复合函数偏导数求法, 本质上同一元函数的复合函数求导也相同: 设 $y = f(u), u = g(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

现在设 $z = f(u, v), u = g(x, y), v = h(x, y)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}.$$

不过在具体计算中, 往往不用拘泥于这个复合函数偏导数求法, 只要熟悉一元函数的复合函数求导法则, 把 z 直接化成关于 x, y 的函数然后求偏导即可.

问题 4 (习题五第 8 题第 (4) 问)**.** 求函数 $z = y + f(v), v = y^2 - x^2$ 的偏导数.

注 8. 所谓的一阶微分形式不变性, 在一元函数和多元函数中也是互通的. 在注 7 中, y 作为关于 x 的函数总是有 $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$ 成立, 而现在 y 又是关于 u 的函数, 则有 $\mathrm{d}y = y'(u)\mathrm{d}u = f'(u)\mathrm{d}u$. 而 u 又是 x 的函数, 则有 $\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x = g'(x)\mathrm{d}x$. 代入得到

$$\mathrm{d}y = f'(u) \cdot g'(x)\mathrm{d}x.$$

这与 $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$ 是相同的. 也就是所谓一阶微分形式不变性.

对二元函数来说, 在注 7 中, z 作为关于 x, y 的函数总是有 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 成立, 而现在 z 又是关于 u, v 的函数, 则有 $\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$. 而 u, v 又是 x, y 的函数, 则有 $\mathrm{d}u = \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}v = \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y$. 代入得到

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial u}(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y).$$

这与 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 是相同的.

所以在计算全微分的时候, 我们仍然不需要拘泥于复合函数求偏导的法则, 要计算 $\mathrm{d}z$, 而 z 的明确函数关系是关于 u, v 的, 那就写成关于 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 的表达式, 然后再利用 u, v 关于 x, y 的函数关系得到答案.

3 二重积分的计算

注 9. 在本课程中所要求的所有二重积分计算, 都可以化归成所谓累次积分的计算, 也就是对于二重积分 $\int\int_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$, 我们总是把区域 D 写成 $x \in [a, b], y \in [y_1(x), y_2(x)]$ 的形式 (或者反过来), 也就是在 xy 平面上, 先用 $x = a, x = b$ 两条竖线框住 D 的左右边界, 然后再对每个 x, 算出 y 的上下限. 然后将积分

变成

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

积分时先算后面对 y 的积分, 此时所有的 x 都看成无关的常数系数, 积出来得到关于 x 的函数再做一次积分.

特别地, 在用二重积分计算空间立体体积时, 不需要能够想象出三维图形, 只要能画出平面上的积分区域 D 的形状, 就可以计算了.

注 10. 二重积分的题型一共只有三种: 直接求积分, 求平面图形面积, 求空间立体体积. 第一种就是累次积分的正常计算, 第二种就是在该区域上积分 1 这个函数, 第三种则是要先画出该空间立体在 xy 平面上的投影区域 D, 然后在 D 上求一个二重积分, 被积函数 $f(x,y)$ 就是这个空间立体在 (x,y) 点处的高度, 也就是围成该空间立体的两个曲面 z 坐标的高度差.

问题 5 (习题五第 18 题第 (3) 问)**.**

$$\int\int_D (y+x^2)\mathrm{d}\sigma.$$

其中 D 是由 $y=x^2, y^2=x$ 围成的区域.

问题 6 (习题五第 19 题第 (1) 问)**.** 计算曲线 $y=x^2, y=x+2$ 围成的平面图形的面积.

问题 7 (习题五第 20 题)**.** 计算由曲面 $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.

问题 8 (习题五第 20 题变式)**.** 计算由曲面 $z=\dfrac{1}{2}-x-y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.

4 祝大家期末顺利!