2024 秋高等数学 D 第二次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 10 月 29 日

1　第三次作业选讲

1.1　x^x 型极限: 对数法与重要极限法

问题 1 (习题一第 19 题 (19) 问). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n$.

问题 2 (习题一第 19 题 (20) 问). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

问题 3 (习题一第 19 题 (21) 问). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+m}$.

注 1. 以上三道作业题均为 x^x 型极限, 也就是要求极限的表达式中底数和指数同时含有未知数. 由于形式非常接近第二个重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, 很多同学采用变形法凑出相应的表达式, 完全正确. 不过在掌握对数法后, 可以尝试解决更复杂的问题.

问题 4 (2023 期中). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sin x)^{\tan x}$.

问题 5 (2019 期中). 若函数 $f(x)=\begin{cases}e^a & x\le 0\\ \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值.

思考 1. 取对数的合法性: 为什么我们可以认为要求极限的这个表达式是正的.

注 2. 对数法只是化简表达式的第一步, 把陌生的 x^x 结构转化成熟悉的乘除结构, 变成初等函数的形式. 之后经常可以配合无穷小量替换 (解决出现的 $\ln x$), 洛必达法则 (进一步化简乘除结构), 三角函数的有界性等技术继续转化. 我们最喜欢的永远是多项式函数和幂函数.

问题 6 (补充题). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

问题 7 (补充题). 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

问题 8 (补充题). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right)$.

1.2　间断点: 习题一第 20 题

定义 1. 连续点, 间断点, 第一类间断点, 第二类间断点, 可去间断点, 跳跃间断点, 无穷间断点.

注 3. 根据定义, 要判断一个点是连续点还是间断点, 必须充分考虑它在定义域里的位置. 特别地, 如果定义域是分段区间, 而要考虑的点只是一个区间的端点, 只需要看单侧连续性, 这时不可能是跳跃间断点.

问题 9 (习题一第 20 题第 (7) 问). 指出函数 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 的连续区间和间断点类型.

问题 10 (习题一第 20 题第 (8) 问). 指出函数 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间和间断点类型.

1.3 最值定理与中间值定理在证明题中的运用: 习题一第 22 题

定理 1 (最值定理). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到它的最大值和最小值.

定理 2 (中间值定理). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值.

推论 1 (零点存在性). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上满足 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有零点.

推论 2 (值域连续性). 连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到最大值与最小值之间的一切值, 因而其值域必为一个连续区间.

问题 11 (习题一第 22 题第 (2) 问). 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且无零点, 则 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

正确写法 1. 反证法. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0, f(d)<0$. 不妨设 $c<d$, 由中间值定理, 存在 $\xi\in[c,d]$ 使得 $f(\xi)=0$, 与 f 无零点矛盾. 故原结论成立. □

正确写法 2. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 且由中间值定理的推论, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到 $[m,M]$ 中的一切值. 由于 f 无零点, 故 $0\notin[m,M]$, 即 $m>0$ 或 $M<0$, 即 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$. □

错误写法 1: 这也要证. 因为 $f(x)$ 没有零点, 所以 $f(x)\neq 0$, 所以 $f(x)>0$ 或者 $f(x)<0$. □

错误写法 2: 记号重复. 假设结论不成立, 则存在 a,b 使得 $f(a)>0, f(b)<0$. □

错误写法 3: 依据不足. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 由于 f 无零点, 所以 $m>0$ 或 $M<0$. (一定要写出能取到 $[m,M]$ 中一切值) □

不严谨的写法 1: 欠缺讨论. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0, f(d)<0$. 由中间值定理, 存在 $\xi\in[c,d]$ 使得 $f(\xi)=0$. (为什么 $c<d$) □

不严谨的写法 2: 逻辑跳步. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0, f(d)<0$. 由中间值定理, 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$. (直接的逻辑关系是 $\xi\in[c,d]$ 而不是 $[a,b]$) □

2 第四次作业选讲

2.1 可导的定义: 习题二第 3 题

问题 12 (习题二第 3 题). 若下面的极限都存在, 判别下式是否正确.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0)$.

注 4. *本题考查的实际上是判断函数在一点处是否可导的等价方式，即左边的极限存在是否能判断 f 在 x_0 处可导，且导数等于该极限值. 因此作答时不能事先假定 $f'(x_0)$ 存在，甚至很多同学写的分类讨论 f 在 x_0 处是否可导也是不严谨的.*

错误解答.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\
=&f'(x_0).
\end{aligned}$$

□

注 5. *运用极限的四则运算法则时，必须时刻注意，经过转化之后的表达式是否还存在极限.*

不严谨的解答. 分类讨论: 当 f 在 x_0 处可导时正确, 理由如下:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\
=&f'(x_0).
\end{aligned}$$

当 f 在 x_0 处不可导时错误. □

注 6. *这里有一定的逻辑问题: 必须要说明左边的极限存在能推出 f 在 x_0 处可导，或者存在一个反例使得左边的极限存在但是 f 在 x_0 处不可导，否则实际上并没有解决这道题.*

正确解答. (2) 的结论是错误的. 取 $f(x)=|x|$, $x_0=0$, 则左边的极限存在:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\
=&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-|\Delta x|}{2\Delta x}=0.
\end{aligned}$$

但是 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处不可导, 原式不正确. □

注 7. *一个本质的问题在于，函数在某一点处的可导性与该点处的取值密切相关，而函数在某一点处的极限与该点处的取值无关. 所以事实上我们可以任取一个可导函数，修改其在一个点处的取值，得到的新的函数就不满足 (2)，因为修改这个取值后左边极限不变，但右边导数就不存在了 (在该点处甚至不连续).*

2.2 判断分段函数可导性: 习题二第 10 题

问题 13 (习题二第 10 题)**.** *判断函数* $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le 1\\ 2x+3 & x>1\end{cases}$ *在 $x=1$ 是否可导.*

错误写法 1: 分不清左右极限和左右导数. $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1+1 = 2$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2+3 = 5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

错误写法 2: 还是分不清左右极限和左右导数. $f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 1+1 = 2$, $f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} f(x) = 2+3 = 5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

注 8. *以上两种错误都是意识到了函数在 1 处不连续, 所以不可导, 但是写法有问题.*

正确解答 1. $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1+1 = 2$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2+3 = 5$, 故 f 在 $x=1$ 处左右极限不相等, 不连续, 所以不可导. □

错误写法 3: 左右导数求法不对. $f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to0^-} \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0^-} \dfrac{(1+\Delta x)^2+1-2}{\Delta x} = 2$, $f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to0^+} \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0^+} \dfrac{2(1+\Delta x)+3-5}{\Delta x} = 2$, 故 f 在 $x=1$ 处左右导数相等, 所以可导. □

注 9. *这里看起来出现了矛盾: 一方面根据前面的讨论 f 不连续, 所以不可导; 另一方面直接计算左右导数似乎又是相等的, 符合导数存在的定义. 这里的问题出在计算左右导数时代入的 $f(1)$ 函数值有问题, 算左导数代入了 2, 算右导数却代入了 5.*

2.3 隐函数求导

问题 14 (习题二第 13 题)**.** *求以下方程所确定的隐函数的导数:*

(1) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, *(2)* $\cos(xy)=x$,

(3) $y=1+xe^y$, *(4)* $x^y=y^x$.

错误解答. (2) $y = \dfrac{1}{x}\arccos x$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}\arccos x - \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. □

正确解答. (2) $-\sin(xy)(y+xy') = 1, y' = \dfrac{1}{x}\Big(-\dfrac{1}{\sin(xy)} - y\Big)$. □

注 10. *有些同学喜欢将方程决定的隐函数求出来然后直接求导, 但是首先大部分情况这是解不出来的, 其次隐函数的唯一性并不是一件显然甚至正确的事情, 比如 (1)(2) 中的隐函数都不唯一, 所以解出来的结果并不严谨, 我们应该掌握直接对隐函数求导的办法.*

注 11. *一般来说隐函数求导的结果会带有自变量 x 和隐函数 y 本身, 而 y 本质上又是 x 的函数, 所以经过不同的化简方式会得到形式上不同的表达式. 这是非常自然的, 只要求导过程正确, 一定可以证明这些表达式是等价的, 因此不需要刻意追求形式的简化, 求出来之后直接下结论即可.*

问题 15 (习题二第 18 题)**.** *若 $x+2y-\cos y=0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.*

错误解答. 对 x 求一阶导: $1+2y'+\sin y\cdot y' = 0$, 故 $y' = -\dfrac{1}{2+\sin y}$. 两边再对 x 求导得: $y'' = \dfrac{\cos y}{(2+\sin y)^2}$. □

注 12. *必须时刻牢记 y 是关于 x 的函数, 很多同学上一题可以做对, 这题求一阶导也都求对, 但是求第二次导数的时候就忘记再乘一个 y', 实际上第二次变成了对 y 求导. 一个可能有帮助的办法是在计算的过程中不写 y, 而是写 $f(x)$, 可以提醒自己这一项也是关于 x 的函数. 但是卷子上最后的结果必须写成带有 y 的形式.*

问题 16 (补充题)**.** *设 u,v,w 关于 x 二阶可导, 令 $y=\arctan\dfrac{u}{vw}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.*

3 补充内容: 中值定理的应用

问题 17. 设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a.b)$ 上可导, 且 $g(a)=0$, 满足 $|g'(x)| \leq \frac{1}{2(b-a)}|g(x)|$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立. 证明: $g(x)=0, \forall x \in [a,b]$.

问题 18 (导函数的介值性)**.** 设函数 $g(x)$ 可导, 且存在 $a<b$ 满足 $g'(a)<g'(b)$. 证明: 对任意 $\eta \in (g'(a), g'(b))$, 存在 $c \in (a,b)$ 使得 $g'(c)=\eta$.

注 13. 世界上的函数千奇百怪, 我们常见的包括初等函数、分段初等函数、幂指函数等等都是性质非常好的, 也就是在除了有限个点之外其他地方无穷次可导. 但是在做抽象的证明题的时候, 一定要记住不能凭空增加条件, 比如上题不能想当然认为 $g(x)$ 的导函数一定是连续的.

4 祝大家考试顺利!