2024 秋高等数学 D 习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2024 年 10 月 15 日

1　准备内容

1.1　助教信息

冯宣瑞　数学科学学院 2024 级博士生
学号: 2401110009
研究方向: 基础数学-偏微分方程
邮箱 (可以邮件答疑): pkufengxuanrui@stu.pku.edu.cn
个人主页 (可以找到课程资料): fengxuanrui.github.io

1.2　课程信息

正课时间: 1-16 周每周, 周二 1-2 节, 周四 3-4 节.
正课地点: 一教 101.
习题课时间: 1-16 周双周, 周二 10-11 节.
习题课地点: 三教 405.
评分标准: 作业 20 分 + 期中考试 40 分 + 期末考试 40 分.
期中考试时间: 第八周周四 3-4 节.
期中考试地点: 一教 101, 一教 201.
期末考试时间: 2025 年 1 月 2 日周四上午 8:30-10:30.

1.3　关于答疑

答疑时间地点: 单周周二 19:00-21:00, 智华楼一楼讨论室; 双周周二习题课课后, 三教 405.
答疑方式: 线下 + 微信 + 邮件.

1.4　关于习题课

内容: 评讲作业 + 补充习题 + 课后答疑.
不计考勤, 允许不影响他人的迟到早退, 不占分数. 可以随时举手提问.

1.5 关于作业

评分标准: 每次作业满分 100 分, 错 0-2 题不扣分, 错 3-4 题 95 分, 依此类推, 最后加起来折合成 20 分计入课程总评. 如果个别作业题目过难, 可能会进行适当调整, 作业打分主要看大家的完成态度, 不会在这一项过分为难大家. 请大家认真准备考试.

提交方式: 正课提交纸质版作业, 习题课或正课发回.

1.6 说在前面的话

1. 为什么要学高数
2. 高数是什么
3. 怎么学好高数
4. 怎么拿到高分
5. 高数之后

2 第一次作业选讲

2.1 周期函数: 习题一第 11 题

定义 1. *周期, 周期函数, 最小周期.*

问题 1. *指出下列函数中哪些是周期函数, 哪些不是; 若是周期函数, 指出其周期.*

(1) $y = \sin ax\,(a > 0)$. *(2)* $y = 4$. *(3)* $y = \sin 2x + \sin \pi x$. *(4)* $y = \sin x + \cos x$.

注 1. *在未加说明的情况下, 应当指出其全部周期.*

思考 1. *指出以下定义的 Dirichlet 函数的全部周期.*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

2.2 反函数: 习题一第 14 题

问题 2. *已知 $f(x) = x + 1$, 求 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.*

错误解答. 由于 $f(x) = x + 1$, 所以 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 1$. 令 $y = \frac{1}{x} + 1$, 则 $x = \frac{1}{y-1}$. 所以

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}.$$

□

正确解答. 令 $y = x + 1$, 则 $x = y - 1$, 即 $f^{-1}(x) = x - 1$. 代入 $\frac{1}{x}$ 得

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1.$$

□

注 2. 错误解答中求出来的实际上是 $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 这个函数的反函数，而题中所求则是 $f(x)$ 的反函数代入 $\frac{1}{x}$ 这个自变量得到的函数.

思考 2. 如何确定反函数的定义域.

3 第二次作业选讲

3.1 求极限: 习题一第 19 题

问题 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1}$.

错误写法 *1.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}}{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$. □

错误写法 *2.* 因为 $n^{1/3}\sin n < n+1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1} = 0$. □

正确写法. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\sin n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^{2/3}+n^{-1/3}} = 0$, 最后一步用到 $|\sin n| \le 1$ 和 $n^{2/3}+n^{-1/3} \to \infty$. □

注 3. 这实际上就是课本提到的: 有界函数 $\times$ 无穷小量 $=$ 无穷小量.

思考 3. 常见的无穷大量之间的大小关系: $n, n^{\alpha}, a^n, n!, \log n, n^n$.

思考 4. 常见的无穷小量之间的大小关系: $x, \sin x, \tan x, 1-\cos x, x^{\alpha}, a^x - 1, \log(x+1), \arcsin x, \arctan x$.

注 4. 关于洛必达法则: 有很多同学在本次作业中用到，我做了批注但没有扣分，因为在本课程的知识体系中还没有讲到这一知识. 如果期中考试前老师已经讲到，考试可以使用，否则非常不建议大家使用洛必达法则计算极限.

3.2 证明题: 补充题第 2 题

问题 4. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. 证明: $|a| \le 1$.

逻辑关系错误 *1.* $|x_n| \le \epsilon, |x_n| \le |a| \cdot \epsilon \Rightarrow |a| \le 1$. □

逻辑关系错误 *2.* $|x_n| \le \epsilon, |x_{n+1}| \le \epsilon$. 则 $|x_{n+1}| - |a| \cdot |x_n| \le |x_n| \Rightarrow \epsilon - |a| \cdot \epsilon \le \epsilon$. □

逻辑关系错误 *3.* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. □

逻辑关系错误 *4.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} x_n} = a$. □

逻辑关系错误 *5.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow |x_{n+1}| \le |x_n|$. □

逻辑关系错误 *6.* $\left|a - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \epsilon \Rightarrow |a| \cdot |x_n| - |a| \cdot |x_{n+1}| < |a| \cdot \epsilon$. □

逻辑关系错误 *7.* $|x_n|$ 单调递增 $\Rightarrow |x_n|$ 是发散数列. □

注 5. 以上的几种错误在作业批改中屡见不鲜，其实如果单独作为判断题让大家做，几乎所有的同学都能判断出其中的错误，但是自己写证明的时候往往意识不到，或者推到这一步发现推不出想要的结论，却没有去更换前面的思路，而是将错就错.

3.3 证明题: 补充题第 3 题, 第 4 题

问题 5. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$. 请用 $\epsilon-\delta$ 语言证明: $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$.

问题 6. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$. 请用 $\epsilon-\delta$ 语言证明: $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 x_0 附近有界.

思考 5. 函数有界, 有上界, 有下界的定义分别是什么.

逻辑关系错误 1. $A-\epsilon < f(x) < A+\epsilon \Rightarrow \dfrac{1}{A-\epsilon} < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{A+\epsilon}$. □

逻辑关系错误 2. $|f(x)| \le A \Rightarrow \dfrac{1}{|f(x)|} \le A$. □

自行增加条件. 假设 $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = B$, 则 $B^2 = A$. □

注 6. 在求解极限或证明题中, 除非可以使用已有的结论 (单调有界必收敛), 否则不能先行假设所求极限存在并代入运算.

问题 7 (2019 秋期中)**.** 设 $a>0$, $x_1>0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, 求证 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

3.4 证明题的书写规范

思考 6. 表达的合理性: 令 $x = \dfrac{1}{x}$. 令 $\epsilon = |a|\epsilon$.

注 7. 在极限的标准定义中, 我们要证明

$$\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < \epsilon.$$

实际上最后的 ϵ 可以换成任意只依赖于 ϵ 和其他普适常数, 不依赖于 N, 而且可以取到充分小的正数.

思考 7. 以下对于 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 的定义的几种变形, 哪些是正确的, 哪些是错误的.

$$\begin{aligned}
&\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < 2\epsilon.\\
&\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < \epsilon^2.\\
&\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < N\epsilon.\\
&\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < \frac{\epsilon}{N}.\\
&\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < \sqrt{\epsilon}.\\
&\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < |x_n|\epsilon.\\
&\forall\epsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |x_n - x| < |x|\epsilon.
\end{aligned}$$

思考 8. 什么才是严谨的数学推导: 远远超过, 增长得很快, 没有这个大, $\Longleftrightarrow$ 计算极限.

注 8 (西江月 · 证明)**.** 即得易见平凡, 仿照上例显然. 留作习题答案略, 读者自证不难.
反之亦然同理, 推论自然成立, 略去过程 *QED*, 由上可知证毕.

思考 9. 是不是每个绝对值都要拆开分类讨论.

思考 10. 每一条结论的依据是不是写清楚了.