北京大学高等数学D期末考试参考答案

2023-2024第一学期

本试卷共7道大题，满分100分

一、 求极限（每题4 分，总共20分）

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin^2\dfrac{k\pi}{n}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$

解.

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 将区间分成n个小区间，每个区间每个区间均为$1/n$.根据定积分的定义看待极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin^2\dfrac{k\pi}{n}$.把$k/n$看做一个变量整体$u$,k/n的取值范围是$[1/n,n/n]$,当$n\to\infty$,也就是[0,1],因此:
原式 $=\int_0^1\sin^2(\pi u)du=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx$.
注意：$\int\sin^2(x)dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos(2x))dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$,因此
原式 $=\frac{1}{2}$.

(3) 当$(x,y)\to(0,0)$ 时, $\sin\left(x^2y+y^4\right)\to 0$, 本题是$\frac{0}{0}$ 型. 注意到对任意变量z,总有

$$|\sin z|\leqslant|z|,\text{因而有:}$$
$$0\leqslant\left|\frac{\sin\left(x^2y+y^4\right)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|.$$

上述不等式的左端为零, 如再能说明不等式右端的极限也是零, 即能快定我们所讨论的函数的极限为零. 又注意

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1,\quad\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1,$$

因此有:

$$\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|+\left|y^2\right|,\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(|y|+\left|y^2\right|\right)=0.$$

根据极限存在准则就得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2y+y^4\right)}{x^2+y^2}=0.$$

或者，根据等价无穷小代换：

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2}{x^2+y^2}+\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\frac{y^2}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

当$(x,y)\to(0,0)$ 时, y和y^2均为无穷小量，

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1,\quad \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1,$$

根据无穷小量的性质，可得：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}=0.$$

(4) $(|x|-|y|)^2\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2\geq 2|xy| \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{xy}{x^2+y^2}<\frac{1}{2}$,由于:
$\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}(-\frac{1}{2})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}(\frac{1}{2})^{x^2}=0$.由夹逼定理可知原式$=0$.

(5) 利用洛必达法则,分子分母分别求导,则:
原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin xe^{-(\cos x)^2}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^{-(\cos x)^2}}{x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}e^{-(\cos x)^2}=-\frac{1}{2e}$

□

二、 求积分（每题4 分，总共20分）

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\sin^2x}\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(2+x)}$

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}xe^x\mathrm{d}x$

解.

(1) 使用三角函数的二倍角公式,$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$,

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\sin^2x}\mathrm{d}x &= \int\frac{\cos 2x}{\frac{1}{4}\left(\sin 2x\right)^2}\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{2}{\left(\sin 2x\right)^2}\mathrm{d}\sin 2x\\ &= -\frac{2}{\sin 2x}+C\end{aligned}$$

或者使用二倍角公式$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x&=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\\&=-\cot x-\tan x+C\end{aligned}$$

(2) 由$\mathrm{d}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}&=\int \frac{2\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}(1+x)}\\&=\int\frac{2\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+x}\\&=\int\frac{2\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\\&=2\arctan\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

(3) 作换元$x=u^2$,$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$,使用分部积分方法求解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}u(\cos u)(2u)\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}2u^2\cos u\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\pi}2u^2\mathrm{d}\sin u=2u^2\sin u\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}u\sin u\mathrm{d}u\\&=4\int_0^{\pi}u\mathrm{d}\cos u=4u\cos u\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos u\mathrm{d}u\\&=4\pi\cos\pi-4\sin u\Big|_0^{\pi}\\&=-4\pi\end{aligned}$$

(4) 使用待定系数方法对$\dfrac{1}{x^2(2+x)}$,设有系数a,b,c.

$$\frac{1}{x^2(2+x)}=\frac{ax+b}{x^2}+\frac{c}{2+x}=\frac{(a+c)x^2+(2a+b)x+2b}{x^2(2+x)}$$

得到方程,

$$\begin{cases}a+c=0,\\2a+b=0,\\2b=1.\end{cases}\quad 解出\begin{cases}a=-\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2},\\c=\frac{1}{4}.\end{cases}$$

因此，定积分求解结果是

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(2+x)}&=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4(2+x)}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2x}\bigg|_2^{+\infty}-\frac{1}{4}\ln x\bigg|_2^{+\infty}+\frac{1}{4}\ln(x+2)\bigg|_2^{+\infty}\\&=-\frac{1}{2x}\bigg|_2^{+\infty}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\bigg|_2^{+\infty}\\&=\frac{1}{4}(1-\ln 2),\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x}\right)=\ln 1=0.$
或者使用变量代换，令$t=\frac{1}{x}$，则$x=\frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(2+x)}&=\int_0^{1/2}\frac{t}{2t+1}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{1/2}\frac{\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{1}{2}}{2t+1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{2t+1}\mathrm{d}(2t+1)\\&=\frac{1}{2}t\bigg|_0^{1/2}-\frac{1}{4}\ln|2t+1|\bigg|_0^{1/2}\\&=\frac{1}{4}(1-\ln 2).\end{aligned}$$

(5) 使用分部积分方法求解，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xe^x\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^0 x\mathrm{d}e^x\\&=xe^x\bigg|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 e^x\mathrm{d}x\\&=0-e^x\bigg|_{-\infty}^0\\&=0-1=-1\end{aligned}$$

其中,$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{e^{-x}}=0$,这里使用到了洛必达法则.

□

三、 求导数（每题10 分，总共20分）

1. 设方程$xyz-\ln yz+2=0$确定了z关于x和y的隐函数$z=f(x,y)$.求$z''_{xy}(0,1)$.

解.

$$z'_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{yz}{xy - \frac{1}{yz}y} = \frac{yz^2}{1 - xyz}$$

$$z'_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xz}{xy - \frac{1}{yz}y} = \frac{xz^2}{1 - xyz}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz^2}{1 - xyz}\right) = \frac{z^2 + 2yzz'_y + yz^2(xz + xyz'_y)}{(1 - xyz)^2}$$

$$z(0,1) = e^2, z'_y(0,1) = 0 \to z''_{xy}(0,1) = e^4$$

□

2. 设$u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$.证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

解.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f' \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f'}{r} + x\frac{rf'' - f'}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{f'(r^2 - x^2) + f''rx^2}{r^3} = \frac{f'y^2 + f''rx^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{f'x^2 + f''ry^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{f' + f''r}{r}$$

$$\frac{du}{dr} = f', \frac{d^2u}{dr^2} = f''$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}$$

□

四、 （10 分）求$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D:|x|\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2$.

解.
$D_1: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x^2$, $D_2: 0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 2$,则

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left(\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{3}x^3 dx = \frac{1}{6}$$

$$\iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

令$x=\sqrt{2}\sin\theta$,则

$$\int_0^1 \frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{3}2\sqrt{2}\cos^3\theta\sqrt{2}\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}$$

因此,$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$ □

五、 (10分) 求函数$h(x,y,z)=3x+4y+12z$在满足$x^2+y^2+z^2=R^2$（R为给定正数）时的极大值和极小值.

解.
引入拉格朗日乘子λ，令$F(x,y,z,\lambda)=h(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$，则极值点满足

$$\begin{cases} F_x = 3+2\lambda x &= 0, \\ F_y = 4+2\lambda y &= 0, \\ F_z = 12+2\lambda z &= 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= -\frac{3}{2\lambda}, \\ y &= -\frac{4}{2\lambda}, \\ z &= -\frac{12}{2\lambda}. \end{cases}$$

将求出的极值点带入约束$x^2+y^2+z^2=R^2$中，可以求出拉格朗日乘子λ的值，即

$$\lambda = \pm\frac{13}{2R}.$$

当$\lambda=13/(2R)$时，有$\min h=-13R$；当$\lambda=-13/(2R)$时，有$\max h=13R$。 □

六、 （10 分）已知二元函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

请讨论函数$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性，可导性，以及可微性.

证明.

（1）连续性

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \le |x^2+y^2| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

即，函数$f(x,y)$在$(0,0)$处的极限为$f(0,0)$，从而函数$f(x,y)$在$(0,0)$连续。

（2）可导性：只需证明$f(x,y)$在$(0,0)$处沿着x和y两个方向的偏导数存在

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = y\sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \xrightarrow{y\to 0} 0,$$

即，在$(0,0)$处函数$f(x,y)$的偏导数$f_x(0,0)$和$f_y(0,0)$存在，且$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$。综上，$f(x,y)$在$(0,0)$处可导。

(3)可微性：首先计算函数$f(x,y)$在$(0,0)$处的增量

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = (\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\left(\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),$$

令$\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则由全微分的定义有，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\rho\sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 0,$$

所以$\Delta f = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$，即函数$f(x,y)$在$(0,0)$处可微。 □

七、（10 分）设函数$f(x)$在x_0处存在三阶导数$f^{(3)}(x_0)$，证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+3x)-3f(x_0+2x)+3f(x_0+x)-f(x_0)}{x^3} = f^{(3)}(x_0).$$

证明.

当$x\to 0$时，待证极限为“$\frac{0}{0}$”型极限。由于$f(x)$在x_0处三阶可导，连续使用两次洛必达法则，再按导数定义即可证明。

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+3x)-3f(x_0+2x)+3f(x_0+x)-f(x_0)}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{3f'(x_0+3x)-6f'(x_0+2x)+3f'(x_0+x)}{3x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{9f''(x_0+3x)-12f''(x_0+2x)+3f''(x_0+x)}{6x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{9f''(x_0+3x)-9f''(x_0+2x)}{6x} - \lim_{x\to 0}\frac{3f''(x_0+2x)-3f''(x_0+x)}{6x}\\
=&\frac{3}{2}f^{(3)}(x_0) - \frac{1}{2}f^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_0)
\end{aligned}$$

□