

北京大学高等数学D期末考试

2023-2024第一学期

本试卷共7道大题，满分100分

一、求极限（每题4分，总共20分）

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n}$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y + y^4)}{x^2 + y^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$$

二、求积分（每题4分，总共20分）

$$(1) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$(3) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$$

$$(4) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2(2+x)}$$

$$(5) \int_{-\infty}^0 xe^x dx$$

三、求导数（每题10分，总共20分）

1. 设方程 $xyz - \ln yz + 2 = 0$ 确定了 z 关于 x 和 y 的隐函数 $z = f(x, y)$. 求 $z''_{xy}(0, 1)$.

2. 设 $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}.$$

四、(10分) 求 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, 其中 $D : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

五、(10分) 求函数 $h(x, y, z) = 3x + 4y + 12z$ 在满足 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (R 为给定正数) 时的极大值和极小值.

六、(10分) 已知二元函数

$$z = f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

请讨论函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性, 可导性, 以及可微性.

七、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在三阶导数 $f^{(3)}(x_0)$, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3x) - 3f(x_0 + 2x) + 3f(x_0 + x) - f(x_0)}{x^3} = f^{(3)}(x_0).$$