北京大学高等数学D期末考试B卷参考答案

2022-2023第一学期

本试卷共7道大题，满分100分

一、 求极限（每题5 分，总共20分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\sin x\ln(\cos x)}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{\sin x\ln(\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x\right]$

令$t=\dfrac{1}{x}$，则原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}-\dfrac{t}{2t(1+t)}=-\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

由于$0\leqslant\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\leqslant 1$，所以$-1\leqslant\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant 1$，故$-|y|\leqslant\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant$ $|y|$，同理有$-|x|\leqslant\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant|x|$.

利用夹挤定理有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0-0=0$

4. 已知函数$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{y^2+\sin x^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$

当$x\to 0$时，$\sin x^2\geqslant 0$，故$0\leqslant\dfrac{y^2}{y^2+\sin x^2}\leqslant 1$。因此$-|x|\leqslant\dfrac{xy^2}{y^2+\sin x^2}\leqslant$ $|x|$，利用夹挤定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{y^2+\sin x^2}=0$

二、 求积分（每题5 分，总共20分）

1. $\int \mathrm{e}^{2x} \sin x \, \mathrm{d}x$

原式 $= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x \mathrm{d}x,$

移项得

$$\int e^{x}\sin x \mathrm{d}x = \frac{2}{5}e^{2x}(\sin x - \frac{1}{2}\cos x) + C.$$

2. $\int \frac{1}{\cos x + \sin 2x} \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x(1+2\sin x)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\,(\sin x)}{(1-\sin^2 x)(1+2\sin x)} \\
&= \int \frac{1}{3}\left(\frac{2\sin x - 1}{1-\sin^2 x} + \frac{4}{1+2\sin x}\right) \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \int \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\sin x} - \frac{3}{1+\sin x} + \frac{8}{1+2\sin x}\right) \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \frac{1}{6}\left[4\ln(1+2\sin x) - 3\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)\right] + C
\end{aligned}$$

3. $\int_0^4 |x^2 - 3x + 2| \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 x^2 - 3x + 2 \, \mathrm{d}x + \int_1^2 -(x^2 - 3x + 2) \, \mathrm{d}x + \int_2^4 x^2 - 3x + 2 \, \mathrm{d}x \\
&= 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 \\
&= (\frac{5}{6} - 0) + (\frac{5}{6} - \frac{2}{3}) + (\frac{16}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{17}{3}
\end{aligned}$$

4. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x \ (p > 0)$

$$\int x\mathrm{e}^{-px} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{p}\int x \, \mathrm{d}\mathrm{e}^{-px} = -\frac{1}{p}\left(x\mathrm{e}^{-px} - \int \mathrm{e}^{-px} \, \mathrm{d}x\right) = -\frac{x\mathrm{e}^{-px}}{p} - \frac{\mathrm{e}^{-px}}{p^2} + \mathrm{C}$$

原式 $=\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = -\frac{x\mathrm{e}^{-px}}{p}\Big|_0^{\infty} - \frac{\mathrm{e}^{-px}}{p^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2}$

三、 求导数（每题10 分，总共20分）

1. 已知函数$z=(x+y^2)^{x^2y}$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$\ln z = x^2y\ln(x+y^2)$，同时对x, y求偏导有$\frac{z_x}{z}=2xy\ln(x+y^2)+\frac{x^2y}{x+y^2}$, $\frac{z_y}{z}=x^2\ln(x+y^2)+\frac{2x^2y^2}{x+y^2}$，于是可以解出$z_x$, z_y。再对$\frac{z_x}{z}$关于y求一次偏导得到

$$\frac{z_{xy}\cdot z - z_x\cdot z_y}{z^2} = 2x\ln(x+y^2) + \frac{x^3-x^2y^2+4xy^2}{(x+y^2)^2}$$

整理合并有

$$z_{xy} = (x+y^2)^{x^2y}\cdot\left(2x^3y\ln(x+y^2)^2 + 2x\ln(x+y^2) + \frac{(x^4y+4x^3y^3)\ln(x+y^2)}{x+y^2} + \frac{2x^4y^3+x^3-x^2y^2+4xy^2}{(x+y^2)^2}\right)$$

2. 设$\int_0^{2x^2} te^t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{4}}^{xz}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t + \int_1^{yz}\tan t\mathrm{d}t = 0$确定函数关系$z=f(x,y)$. 求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

令$F(x,y,z)=\int_0^{2x^2} te^t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{4}}^{xz}\frac{\sin t}{2t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{yz}\tan t\,\mathrm{d}t$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x^3\cdot\mathrm{e}^{2x^2} + \frac{\sin(xz)}{2x},\quad \frac{\partial F}{\partial y} = z\cdot\tan(yz),\quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\sin(xz)}{2z} + y\cdot\tan(yz)$$

利用隐函数定理知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z\left(\sin(xz)+16x^4\mathrm{e}^{2x^2}\right)}{x\left(2yz\cdot\tan(yz)+\sin(xz)\right)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2z^2\tan(yz)}{2yz\cdot\tan(yz)+\sin(xz)}$$

再把$z=f(x,y)$代入即可

四、 （10 分）求由平面$x=0$, $y=0$, $z=0$, $3x+2y=6$,以及$x+y+z=4$所围成空间立体的体积,并确定函数$f(x,y)=4-x-y$ 在区域$D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,2y+3x-6\leq 0\}$內的平均值.

解. $D_1=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 4\}$，不难发现

$$\mathrm{V}=\iint\limits_{D_1}(4-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D}(4-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{64}{3}-7=\frac{43}{3}$$

空间立体的体积为$V=\dfrac{40}{3}$，或

$$\mathrm{V}_1=\iint\limits_{D}(4-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=7.\quad S(D)=\iint\limits_{D}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3$$

函数$f(x,y)$在区域D的平均值为$\overline{f}=V_1/S(D)=\dfrac{7}{3}$.

五、 （10 分）已知二元函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 请利用多元函数微分学的知识讨论函数$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性和可微性.

解. $0\leqslant\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leqslant 1$，所以$0\leqslant\left|(x^2+y^2)^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leqslant(x^2+y^2)^2$，利用夹挤定理知，$0\leqslant\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|(x^2+y^2)^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leqslant\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^2$。
于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$，$f(x,y)$在$(0,0)$处连续。
同时由上分析知，$0\leqslant\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leqslant\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，故利用夹挤定理，当$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$，因此根据函数可微的定义，$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，且偏导数均为0。

六、 (10分)求由方程

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$$

确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值.

解. 设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11$，则隐函数$z=z(x,y)$由$F(x,y,z)=0$确定。根据隐函数求导法则知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x-1}{3-z},\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y+2}{3-z}$$

令$\partial_x z=0$, $\partial_y z=0$解得$x=1$, $y=-2$，注意到此时$z=-2$或8，这意味着存在两个隐函数。设隐函数$z_1(x,y)$经过点$(1,-2,-2)$，隐函数$z_2(x,y)$经过点$(1,-2,8)$ 又由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{3-z+(x-1)\partial_x z}{(3-z)^2},\qquad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(x-1)\partial_y z}{(3-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3 - z + (y+2)\partial_y z}{(3-z)^2}$$

于是在点$(1,-2,-2)$处$A = \dfrac{1}{5} > 0\,, B = 0\,, C = \dfrac{1}{5}$，故点$(1,-2)$是函数$z_1(x,y)$的极小点，极小值为$-2$；在点$(1,-2,-2)$处$A = -\dfrac{1}{5} > 0\,, B = 0\,, C = -\dfrac{1}{5}$，故点$(1,-2)$是函数$z_1(x,y)$的极大点，极大值为8

七、 （10 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对任意$[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$，恒有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq (\beta-\alpha)^2$$

证明：$f(x) \equiv 0$

证明. 设$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$，由于$f(x)$连续，故利用微积分基本原理知$F(t)$在$(a,b)$中可微。原不等式关系可以写为$|F(\beta) - F(\alpha)| \leqslant (\beta-\alpha)^2$，对任意固定$\alpha \in [a,b]$，有

$$\frac{|F(\beta) - F(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq |\beta - \alpha|$$

令$\beta \to \alpha$，因为$F(t)$可微，故对不等式取极限有$|F'(\alpha)| \leqslant 0$，由α任意性知$F' \equiv 0$，而$F' = f$，故$f \equiv 0$，证毕