北京大学高等数学D期末考试B卷

2022-2023第一学期

本试卷共7道大题，满分100分

一、 求极限（每题5 分，总共20分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x\right]$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. 已知函数$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{y^2+\sin x^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

   求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$

二、 求积分（每题5 分，总共20分）

1. $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,dx$

2. $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x+\sin 2x}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^4|x^2-3x+2|\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-px}dx\ (p>0)$

三、 求导数（每题10 分，总共20分）

1. 已知函数$z=(x+y^2)^{x^2y}$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设$\displaystyle\int_0^{2x^2}te^t dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{xz}\frac{\sin t}{2t}dt+\int_1^{yz}\tan t dt=0$确定函数关系$z=f(x,y)$. 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

四、 （10 分）求由平面$x=0$, $y=0$, $z=0$, $3x+2y=6$,以及$x+y+z=4$所围成空间立体的体积,并确定函数$f(x,y)=4-x-y$ 在区域$D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,2y+3x-6\leq 0\}$内的平均值.

五、 （10 分）已知二元函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right),\ x^2+y^2\neq 0\\ 0,\qquad x^2+y^2=0\end{cases}$

请利用多元函数微分学的知识讨论函数$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性和可微性.

六、 (10分) 求由方程

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$$

确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值.

七、 （10 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对任意$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，恒有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq(\beta-\alpha)^2$$

证明：$f(x)\equiv 0$.