北京大学数学科学学院期末试题

2020 - 2021 学年第 1 学期

考试科目：高等数学（D） 考试时间：2021年1月14日

姓名：____________________ 学号：____________________

本试题共 五 道大题，满分100分

一、判断下列叙述是否正确，如果错误，说明理由（每题2 分，总共10 分）

1．函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可导是$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微的必要条件。（ √ ）

2．函数$f(x)$在$[a,b]$上有界是$f(x)$在$[a,b]$上可积的必要条件。（ √ ）

3．若在$[a,b]$上，$f(x)\geq 0$，且$\int_a^b f(x)\,dx=0$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$。（×）例如：函数在$[a,b]$上不连续，除在若干点处为有限正值外，在其它点均为零。

4．$(e^x+e^{-x})^2$和$(e^x-e^{-x})^2$均是同一个函数的原函数。（ √ ）

5．设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内有定义，且$f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=-1$，则有$dz|_{(0,0)}=3dx-dy$。（×）该点函数可能不可微：（函数除在该点邻域内可导外，在该点处函数的偏导数还要连续，才能保证函数可微）

二、选择题，从四个选项中选择一个最恰当的（每题4 分，总共20分）

1．下列等式正确的是（ B ）

(A) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(x)$ (B) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx=f(x)$

(C) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(x)dx=f(x)-f(a)$ (D) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f'(x)dx=f(x)$

2．曲线$y=\ln(1-x^2)$在$x\in[0,\dfrac{1}{2}]$上的弧长为（ C ）

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{(1-x^2)^2}}dx$ (B) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{2x}{1-x^2}}dx$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$ (D) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+[\ln(1-x^2)]^2}dx$

3．函数$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$（ B ）

(A) 恒为零 (B) 为正数

(C) 为负数 (D) 不是常数

4．设$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$上非负是$\displaystyle\int_0^x f(t)dt$在$[a,b]$上单调递增的（ B ）

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充要条件 (D) 即非充分又非必要条件

5．设$I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx$，其中$k=1,2,3$，那么$I_1$，$I_2$和$I_3$的大小关系为（ C ）

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_1<I_3<I_2$

(C) $I_2<I_1<I_3$ (D) $I_3<I_2<I_1$

三、填空题（每题4 分，总共20分）

1. 若$\int f'(x^3)dx = x^3 + C$，则$f(x) = \underline{9/5\,\mathrm{x}^{5/3}+C}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+ne^{\frac{2k}{n}}} = \underline{\arctan e - \pi/4}$.

3. 定积分$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^t-1)dt}{\int_0^x x^2\sin t dt} = \underline{1\qquad\qquad}$.

4. 若区域$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2\}$，则二重积分$I = \iint\limits_D |xy|dxdy = \underline{\mathrm{R}^4/2\qquad\quad}$.

5. 设z是方程$x+y-z=e^z$所确定的关于x和y的函数，那么$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \underline{-e^z/(1+e^z)^3}$.

四、计算题（每题5 分，总共30分）

1. 计算不定积分$\int \dfrac{x+1}{x^2-2x+2}dx$

解：
$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x+2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{1+(x-1)^2}dx + 2\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + 2\arctan(x-1) + C\end{aligned}$$

其中，C为任意常数.

2. 求二元函数$z = x^2+y^2-12x+16y$在平面区域$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 25\}$上的最大值和最小值。

解：

方法1：极值法

$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$，则$x=6$；$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$，则$y=-8$。即驻点位于平面区域$D$以外，所以最值取在区域$D$的边界上。利用朗格朗日乘数法：

设$F(x,y) = x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$，令 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 得：

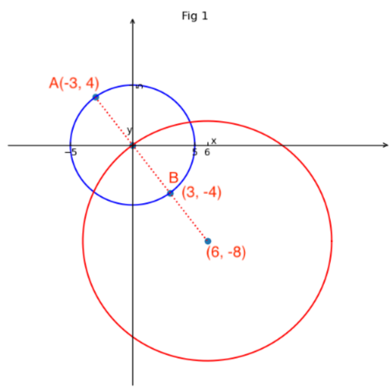
$$\begin{cases} 2x-12+2\lambda x = 0 \\ 2y+16+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 \le 25 \\ \lambda(x^2+y^2-25) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{3}{4} \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$$

解上述方程得最大值点$(-3,4)$，最小值点$(3,-4)$，即最大值和最小值分别为$z_{max} = 125, z_{min} = -75$

方法2：几何观察法

原函数$z=(x-6)^2+(y+8)^2-100$，$\{(x,y,z)|z=(x-6)^2+(y+8)^2-100\}$ 的几何意义为开口向上的抛物面， 取 $z=0$ 时的截面， 如下图， 连接两圆圆心 $(0,0),(6,-8)$ 并反向延长交圆 O 于 A,B 两点，联立方程

$$\left\{\begin{array}{l} y=-\frac{4}{3}x \\ x^2+y^2=25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A(-3,4) \\ B(3,-4) \end{array}\right.$$



则由抛物面的形状可知，最大值在点 $A(-3,4)$ 取得125，最小值在点 $B(3,-4)$ 取得-75.

3. 计算曲线$xy=a^2$和直线$x+y=\dfrac{5}{2}a$所围成的平面图形的面积，并求该平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

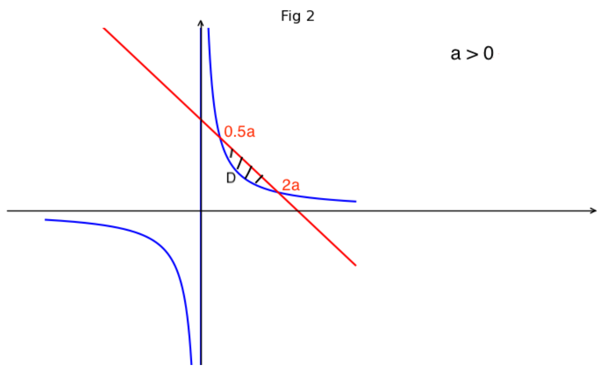
解:

首先，需要考虑两曲线交点问题:

$$\left\{\begin{array}{l} xy=a^2 \\ x+y=\frac{5}{2}a \end{array}\right. \Longrightarrow x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2}a \\ x_2=2a \end{array}\right.$$

注意到， 若$a=0$， 则围成图形为不封闭图形，无意义. 结合下面的函数图象，不妨设$a>0$.

设所围成的平面图形 D 的面积为S_D，该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为V_D， 则



$$S_D=\int_{\frac{1}{2}a}^{2a}(\frac{5}{2}a-x-\frac{a^2}{x})dx=(\frac{5}{2}ax-\frac{1}{2}x^2-a^2\ln|x|)\Big|_{\frac{1}{2}a}^{2a}=(\frac{15}{8}-2\ln 2)a^2$$

$$V_D=\pi\int_{\frac{1}{2}a}^{2a}[(\frac{5}{2}a-x)^2-(\frac{a^2}{x})^2]dx$$
$$=\pi\big(\frac{1}{3}(x-\frac{5}{2}a)^3+\frac{a^4}{x}\big)\Big|_{\frac{1}{2}a}^{2a}=\frac{9}{8}\pi a^3$$

综合$a>0$，$a<0$ 的情形，得$S_D=(\frac{15}{8}-2\ln 2)a^2;V_D=\frac{9}{8}\pi|a|^3$

4. 对于有n个类别的某离散系统，若用p_k描述被分入第k类的概率，则所有类别概率总和为1，即$g(p_1,p_2,...,p_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k=1$，其分布的混乱程度可以用信息熵表示，即$S(p_1,p_2,...,p_n)=\prod\limits_{k=1}^{n}p_k^{-p_k}$。如何对$p_1,p_2,...,p_n$取值，才能使$S$能够取得最大值？请确定$S$的最大值。

解：（使用拉格朗日乘数法）

做法1：注意到函数 $\ln x$ 为单调增函数，则

$$\arg\max\Pi_{k=1}^{n}p_k{}^{-p_k}\iff\arg\max\sum_{k=1}^{n}-p_k\ln p_k$$

设$F(p_1,p_2,\ldots,p_n)=\sum_{k=1}^{n}-p_k\ln p_k-\lambda\big(\sum_{k=1}^{n}p_k-1\big)$,

令 $\frac{\partial F}{\partial p_k}=0,k=1,2,\ldots,n$ 得：

$$\begin{cases}-\ln p_k-1-\lambda=0\\ \sum_{k=1}^{n}p_k=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}p_j=e^{-(1+\lambda)}\\ \lambda=\ln n-1\end{cases}$$

解上述方程得$p_j=\frac{1}{n},j=1,2,\ldots,n$，即取 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$ 使 S 取最大值n.

做法2：也可以直接利用信息焓定义新函数，并利用拉格朗日乘数法：

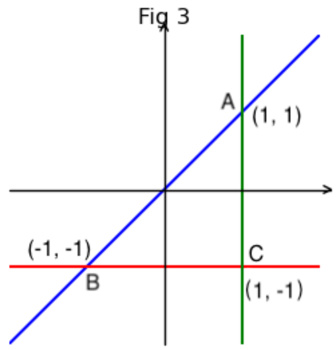
设：$F(p_1,p_2,\ldots,p_n)=\Pi_{k=1}^{n}p_k^{-p_k}+\lambda\big(\sum_{k=1}^{n}p_k-1\big)$

令 $\frac{\partial F}{\partial p_k}=0,k=1,2,\ldots,n$ 得:

$$\begin{cases} -S(\ln p_k+1)+\lambda=0 \\ \sum_{k=1}^{n}p_k=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p_1=p_2=\cdot=p_n=1/n \\ \lambda=n(1-\ln n) \end{cases}$$

使 S 取最大值n.

5. 求函数$z=x^2+xye^{x^2+y^2}$在由直线$y=x$，$y=-1$及$x=1$围成的平面区域内的平均值。



解: 记 上图三角形 ABC 为区域D, S_D 为区域 D 的面积, 则由积分中值定理知, 平均值为（考虑到函数的奇偶性和对称性）

$$\begin{aligned}\frac{\iint_D(x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy}{S_D}=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-1}^{x}(x^2+xye^{x^2+y^2})dy\Big)dx\\=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2(x+1)dx+0\\=&\frac{1}{3}\end{aligned}$$

6. 在经济学和金融学中，边际成本指的是每一单位新增生产的产品（或者购买的产品）带来的总成本的增量。某工厂生产甲乙两种产品，若两种产品的产量（单位：kg）分别为x和y，则生产总成本（单位：元）为$c(x,y)=3(x+y)^2+100\ln(xy)$。求$x=4$，$y=5$时甲乙两种产品的边际成本分别为多少。

解: 对 $c(x,y)=3(x+y)^2+100\ln(xy)$ 求全微分得,

$$\begin{aligned}dc(x,y)=&3(x+y)^2+100\ln(xy)=\frac{\partial c}{\partial x}dx+\frac{\partial c}{\partial y}dy\\=&\big(6(x+y)+\frac{100}{x})dx+\big(6(x+y)+\frac{100}{y})dy\end{aligned}$$

当 $x=4,y=5$ 时，用 dc 近似增量 $\triangle c$，则从边际成本的定义知，取 $\triangle x=1,\triangle y=0$，此时，生产甲产品的边际成本为

$$\triangle c \approx \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=4,y=5}\triangle x=79$$

取 $\triangle x=0,\triangle y=1$，生产乙产品的边际成本为

$$\triangle c \approx \frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{x=4,y=5}\triangle y=74$$

五、证明题（每题5 分，总共10分）

1．若 $f(x)>0$ 且连续，证明函数 $g(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt=0$ 在区间 (a,b) 内仅有一个根。

证明：由于函数 $f(x)>0$ 连续，$g'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$。

因此，函数 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增。

又：$g(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt<0$

$g(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

所以：函数 $g(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根。

2．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $0<\alpha<1$，$f'(x)\le 0$。证明：

$$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx.$$

证法1：

左-右：

$$\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha(\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^1 f(x)dx)$$

$$=(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_\alpha^1 f(x)dx$$

有定积分中值定理：上式进一步可以写作：

$(1-\alpha)(\alpha-0)f(\eta)-\alpha(1-\alpha)f(\zeta)$

因为 $0<\alpha<1$，$f'(x)\le 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内递减，即 $f(\eta)\ge f(\zeta)$，因此 $(1-\alpha)(\alpha-0)f(\eta)-\alpha(1-\alpha)f(\zeta)\ge 0$，所以有：

$$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx.$$

证法2：

左-右：

$\int_0^\alpha f(x)dx - \alpha\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\alpha f(x)dx - \alpha(\int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^1 f(x)dx)$

$= (1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)dx - \alpha\int_\alpha^1 f(x)dx \ge (1-\alpha)(\alpha-0)f(\alpha) - \alpha(1-\alpha)f(\alpha) = 0$（利用定积分几何意义和所以$f(x)$在$[0,1]$内递减）

所以有：$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx.$

证法3：变量代换法

令$x=\alpha t$，则$\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^1 f(\alpha t)d(\alpha t) = \alpha\int_0^1 f(\alpha t)d(t)$

由于$f(t)$在$[0,1]$内递减，所以$f(\alpha t) \ge f(t)$

根据定积分几何意义：$\alpha\int_0^1 f(\alpha t)d(t) \ge \alpha\int_0^1 f(t)d(t)$

即：$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx.$