北京大学数学科学学院期末试题

2020 - 2021 学年第 1 学期

考试科目：高等数学（D）　　　　考试时间：2021年1月14日

姓名：________________　　　　学号：________________

本试题共 五 道大题，满分100分

一、判断下列叙述是否正确，如果错误，说明理由（每题2 分，总共10 分）

1．函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可导是$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微的必要条件。

2．函数$f(x)$在$[a,b]$上有界是$f(x)$在$[a,b]$上可积的必要条件。

3．若在$[a,b]$上，$f(x)\geq 0$，且$\int_a^b f(x)\,dx=0$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$。

4．$(e^x+e^{-x})^2$和$(e^x-e^{-x})^2$均是同一个函数的原函数。

5．设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内有定义，且$f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=-1$，则有$dz|_{(0,0)}=3dx-dy$。

二、选择题，从四个选项中选择一个最恰当的（每题4 分，总共20分）

1．下列等式正确的是（　　）

(A) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(x)$　　(B) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx=f(x)$

(C) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(x)dx=f(x)-f(a)$　　(D) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f'(x)dx=f(x)$

2．曲线$y=\ln(1-x^2)$在$x\in[0,\dfrac{1}{2}]$上的弧长为（　　）

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{(1-x^2)^2}}dx$　　(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{2x}{1-x^2}}dx$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$　　(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+[\ln(1-x^2)]^2}dx$

3．函数$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$（　　）

(A) 恒为零　　(B) 为正数

(C) 为负数　　(D) 不是常数

4．设$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$上非负是$\displaystyle\int_0^x f(t)dt$在$[a,b]$上单调递增的（　　）

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 即非充分又非必要条件

5．设$I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx$，其中$k=1,2,3$，那么$I_1$，$I_2$和$I_3$的大小关系为（　　）

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_1<I_3<I_2$

(C) $I_2<I_1<I_3$　　(D) $I_3<I_2<I_1$

三、填空题（每题4 分，总共20分）

1. 若$\int f'(x^3)dx = x^3 + C$，则$f(x) =$ ________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+ne^{\frac{2k}{n}}} =$ ________.

3. 定积分$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^t-1)dt}{\int_0^x x^2\sin t dt} =$ ________.

4. 若区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，则二重积分$I=\iint\limits_D |xy|dxdy =$ ________.

5. 设z是方程$x+y-z=e^z$所确定的关于x和y的函数，那么$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$ ________.

四、计算题（每题5 分，总共30分）

1. 计算不定积分$\int\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}dx$

2. 求二元函数$z=x^2+y^2-12x+16y$在平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 25\}$上的最大值和最小值。

3. 计算曲线$xy=a^2$和直线$x+y=\dfrac{5}{2}a$所围成的平面图形的面积，并求该平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

4. 对于有n个类别的某离散系统，若用p_k描述被分入第k类的概率，则所有类别概率总和为1，即$g(p_1,p_2,...,p_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k=1$，其分布的混乱程度可以用信息熵表示，即$S(p_1,p_2,...,p_n)=\prod\limits_{k=1}^{n}p_k^{-p_k}$。如何对$p_1,p_2,...,p_n$取值，才能使$S$能够取得最大值？请确定$S$的最大值。

5. 求函数$z=x^2+xye^{x^2+y^2}$在由直线$y=x$，$y=-1$及$x=1$围成的平面区域内的平均值。

6. 在经济学和金融学中，边际成本指的是每一单位新增生产的产品（或者购买的产品）带来的总成本的增量。某工厂生产甲乙两种产品，若两种产品的产量（单位：kg）分别为x和y，则生产总成本（单位：元）为$c(x,y)=3(x+y)^2+100\ln(xy)$。求$x=4$，$y=5$时甲乙两种产品的边际成本分别为多少。

五、证明题（每题5 分，总共10分）

1. 若$f(x)>0$且连续，证明函数$g(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}dt=0$在区间$(a,b)$内仅有一个根。

2. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且满足$0<\alpha<1$，$f'(x)\le 0$。证明：

$$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx.$$