2019-2020 学年第一学期期末考试试卷（高等数学 D 类）

考试时间：2019 年 12 月 31 日 14:00 -16:00 满分 100 分

一、 判断下列说法的正确性，如错误请简述理由或给出反例 （每题 2 分，总共 10 分）

1. 设 f(x)在闭区间[a, b]上连续，则在开区间(a, b)内 f(x)必有原函数。

   正确。

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在某点处及该点处的邻域内的偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在该点处可微。

   错误，参看教材，还需要保证在该点处连续

3. 函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续是 $f(x)$在$[a,b]$上可积的必要条件。

   错误，分段连续也可以。

4. 若$b>a>e$，那么一定有$\int_a^b (\ln x)^3 dx > \int_a^b (\ln x)^2 dx$。

   正确

5. 函数 $f(x,y)$ 在点(x,y)可导是 $f(x,y)$在该点连续的充分条件。

   错误，二元函数可导不一定连续。

二、 选择题，从四个选项中选择1个最恰当的（每题4 分，总共20分）

1. 若 f(x)的导函数为$\sin x$，则 f(x)的一个原函数为(B).

   (A) $1+\sin x$　　(B) $1-\sin x$

   (C) $1+\cos x$　　(D) $1-\cos x$

2. 设 f(x)是连续函数，$F(x)=\int_{x^2}^{e^x} f(t)dt$，则$F'(0)$ = (A).

   (A) $f(1)$　(B) 0　(C) 1　(D) $f(1)-f(0)$

3. 对定义在实轴上的函数$\mathrm{f}(x)=\int_0^x (t-1)(t+2)^2 dt$， 关于其极大值点、极小值点和拐点描述正确的是(C)

   (A)极大值点：无；极小值点：1；拐点：-2 和 1。
   (B)极大值点：-2；极小值点：无；拐点：0 和 1。
   (C)极大值点：无；极小值点：1；拐点：-2 和 0。
   (D)极大值点：-2；极小值点：无；拐点：-2 和 1

4. 设 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{x}}f(x,y)dy$,交换积分的次序，有 $I=$ (　C　)

(A) $\int_{1}^{2}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}}f(x,y)dx$　　　(B) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_{y^2}^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{2}}^{y^2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}}f(x,y)dx$　(D) $\int_{1}^{2}dy\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_{y^2}^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx$

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}t\sin tdt}{x^5}=$ (　A　)

(A) 0　(B) $+\infty$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) 1

三、　填空题（每题4分，总共20分）

1. 广义积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ =____1/2____

解：

原积分= $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-x^2}d(-x^2)=\lim\limits_{t\to+\infty}[-\frac{1}{2}e^{-x^2}|_0^t]=\frac{1}{2}$

2. 若 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=2$，又函数 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 连续，则 $a=$

2.

3. 已知 $\frac{x}{z}=\varphi(\frac{y}{z})$，$\varphi$ 为可微分函数，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$___z____.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$，则 $f(x)$ 在区间[3,5]上的平均值为__$\frac{1}{8}\ln\frac{15}{7}$__

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+...+\sqrt{1+\frac{n}{n}})=$____$\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$___

四、计算题（每题 6 分，总共 30 分）

1. 计算不定积分 $\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$

解：　做变量替换，令 $t=\tan x$，$\mathrm{d}t=\sec^2 x\mathrm{d}x$，所以有

$$I=\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}\sec^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$$

做变量替换，令 $u=\ln t$， $\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$， 所以有

$$I=\int u\mathrm{d}u=\frac{u^2}{2}+C=\frac{(\ln\tan x)^2}{2}+C$$

2. 设抛物线$y=ax^2+2x+c$,且$a<0$, 通过点$(0,0)$。计算该抛物线与直线 y=0 所围成图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

解：抛物线$y=ax^2+2x+c$通过点$(0,0)$，可得 c=0。a<0 说明该抛物线是凸的。该抛物线和 y=0 的交点分别在 x=0, x=-2/a。抛物线和 y=0 所围成图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$V=\int_0^{-2/a}\pi(ax^2+2x)^2dx=\pi\left(\frac{a^2}{5}x^5+ax^4+\frac{4}{3}x^3\right)|_0^{-2/a}=-\frac{16\pi}{15a^3}$。

3. 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

解: 令$x=\frac{1}{t}$，则原积分可化为

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\\ &= \ln(t+\sqrt{1+t^2})|_0^1\\ &= \ln(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

4. 计算由四个平面 $x=0$， $y=0$， $x=1$， $y=1$所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$截得的立体的体积。

解：

此立体为一不规则柱体，它的底是 xOy 面上的闭区域

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，

对于平面 $z=6-2x-3y$，将底面 4 个顶点 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 分别代入此平面，得 $z=6$，3，4，1，均大于 0，所以我们可知此几何体顶是平面 $z=6-2x-3y$，因此所求立体的体积

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (6-2x-3y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (\frac{9}{2}-2x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

5. 在椭球 $4x^2+y^2+4z^2=4$ 内，内接一长方体，问如何选取长、宽、高，使其体积最大

解：

设椭球上的一点 (x,y,z) 满足 $x,y,z>0$，则以此点为顶点的内接长方体的体积为 $V=8xyz$

做拉格朗日函数

$$L=8xyz-\lambda(4x^2+y^2+4z^2-4)$$

令

$$
\begin{cases}
L_x{'}=8yz-8\lambda x=0 & ① \\
L_y{'}=8xz-2\lambda y=0 & ② \\
L_z{'}=8xy-8\lambda z=0 & ③
\end{cases}
$$

由上式得，若 $\lambda=0$，则 x，y，z 中至少有两个为 0，与题意内接长方体 $(x,y,z\neq 0)$ 矛盾．若 $\lambda\neq 0$，则 $4x^2=4z^2=y^2$，将此关系式代入条件 $4x^2+y^2+4z^2=4$，因为 $x,y,z>0$，所以得到

$$x=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

将 (x,y,z) 代入①得，$\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

由于$(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$是函数$V$在定义域内的唯一驻点，因此点$(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$使此长方体体积最大，最大值为$V=\frac{16\sqrt{3}}{9}$，长、宽、高分别为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$、$\frac{4\sqrt{3}}{3}$、$\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

五、证明题（每题 10 分，总共 20 分）

1. 设 f (x)是(0, 1)上的可微函数，且满足 f (0) = 0, $f'(x) > 0$，对 0 < α < β < 1，求证：

$$\int_0^1 f(x)dx > \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

证明：

需证

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^1 f(x)dx > \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}f(A) + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}f(B) + \frac{1-\beta}{1-\alpha}f(C) > f(B)$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}f(A) + \frac{1-\beta}{1-\alpha}f(C) > \frac{1-\beta}{1-\alpha}f(B)$$

$$\frac{\alpha}{1-\beta}f(A) + f(C) > f(B)$$

这其中 A ∈ [0, α], B ∈ [α, β], C ∈ [β, 1]，分别是平均值。用条件可知，因为 A < B < C，所以一定有 0 < f (A) < f (B) < f (C)。

2. 设$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$

证明：利用隐函数微分法：

设

$$F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2\cos(x+2y-3z)-1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3$$

所以，当$\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$