高等数学 (D 类) 期末考试 A 卷试题

本试卷共 5 道大题，满分 100 分　　　　2018 年 1 月 11 日

一、判断下列叙述是否正确，如果错误，说明理由 (每题 2 分，总共 10 分)

1. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内存在不可去间断点，则该函数一定是不可积的；
2. 对于无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，如果 $f(x)$ 是奇函数，则该积分值为零；
3. 若多元函数在某点偏导数存在，则函数在该点可微；
4. 如果二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$；
5. $f(x)$ 是定义在实数域上的连续周期函数，周期为 T，则对任意实数 a，都有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

二、选择题，从四个选项中选择一个最恰当的 (每题 4 分，总共 20 分)

1. 已知理想气体的状态方程为 $pV = RT$，其中 p、V 和 T 分别为气体的压强、体积和温度，R 为常数，则 $\dfrac{\partial p}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial p}$ 的值为 (　　)

   (A)　1；　　(B)　-1；　　(C)　2；　　(D)　-2.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^6} =$ (　　)

   (A)　$\dfrac{1}{6}$；　　(B)　$\dfrac{1}{3}$；　　(C)　$\dfrac{1}{2}$；　　(D)　∞.

3. 设 $I = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$，交换积分的次序，有 $I =$ (　　)

   (A)　$\int_0^1 dy \int_0^{\ln y} f(x,y)dx$;　　(B)　$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x,y)dx$;

   (C)　$\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$;　　(D)　$\int_1^e dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

4. 已知 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，$\int_a^b f(x)dx = P$，$\int_a^b g(x)dx = Q$，$(b > a > 0)$，则 $\int_{-b}^{-a} [f(x) - g(x)]dx$ 的值为 (　　)

   (A)　$P - Q$;　　(B)　$Q - P$;　　(C)　$P + Q$;　　(D)　$-(P + Q)$.

5. 下列结论正确的是 (   )

   (A) 周期函数的原函数一定是周期函数；

   (B) 周期函数的原函数一定不是周期函数；

   (C) 奇函数的原函数一定是偶函数；

   (D) 偶函数的原函数一定是奇函数。

三、填空题 (每题 4 分，总共 20 分)

1. 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| =$ ____________________；

2. 已知 $y=\int_0^x \sin(t^2)dt$，则 $y''=$__________；

3. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则函数 $z=z(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处的全微分是____________________；

4. 设有一条曲线通过 $(1,3)$ 点，并且曲线上每一点处切线的斜率都是 $4x$，则曲线的方程为____________________；

5. 如果 $z=\arctan\frac{y}{x}$，那么，$dz=$____________________.

四、计算题 (每题 6 分，总共 30 分)

1. 计算不定积分 $\int e^x\sin x dx$；

2. 设 $u=e^{x^2+y^2+z^2}$，而 $z=x^2\sin y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$；

3. 已知一个直角三角形斜边长为 ℓ，请采用拉格朗日乘子法判断当这个三角形两条直角边分别为多少时，这个直角三角形的周长 s 最大，并求出这个周长最大值；

4. 计算二重积分 $I=\iint_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域；

5. 计算由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形，绕 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积。

五、证明题 (每题 10 分，总共 20 分)

1. 证明
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx=0;$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$。证明函数 $y=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$ 满足方程 $\frac{dy}{dx}+y=f(x)$，并求 $\lim_{x\to+\infty}y(x)$.