2025 秋高等数学 D 第八次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 12 月 23 日

1　多元函数的偏导数与全微分

1.1　偏导数

定义 1 (偏导数与可导性). 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 则 $g(x) \triangleq f(x,y_0)$ 是在 x_0 的某个邻域内有定义的一元函数. 如果 $g(x)$ 在 x_0 处可导, 则称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处存在对 x 的偏导数, 并记为

$$f'_x(x_0,y_0) = g'(x_0).$$

偏导数的记号有时也写成 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 或 $\partial_x f(x_0,y_0)$. 如果二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处对 x,y 的偏导数都存在, 则称 $f(x,y)$ 在 P 处可导.

注 1 (可导与连续的关系). 从定义中可以看出, $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数只反映它在经过 (x_0,y_0) 的两条坐标轴上的函数值的信息, 而无法刻画这两条坐标轴之外的点处函数值的信息. 而如果要 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 则需要涉及 (x_0,y_0) 附近一个 (圆形或方形) 邻域内的函数值的信息. 所以对于多元函数而言不存在 "可导 $\Rightarrow$ 连续" 这一准则. 一般地, 可导的条件甚至无法给出任何涉及到 (x_0,y_0) 邻域内的性质, 即使是 "可导 $\Rightarrow$ 有界" 都是错误的.

注 2 (偏导数的计算方法). 多元函数偏导数的计算本质上是一元函数的求导, 因此只要熟练掌握了一元函数的求导, 并且弄清楚哪些字母是自变量, 哪些字母是因变量, 偏导数的计算就易如反掌. 在处理隐函数求偏导问题时, 一定要分清楚自变量和因变量.

问题 1. 设 $f(x,y) = xy + \sin(x^2+y^2) - \dfrac{\sqrt{x}}{\ln y}$, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

问题 2. 设 $z = z(x,y)$ 是由以下方程决定的隐函数: $xyz + \sin(x^2+y^2+z^2) - \ln(xz+yz^2) = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.2　全微分

前面已经提到过, 对于多元函数来说, 偏导数只能反映函数在两条坐标轴上的信息. 那么自然我们需要一个更强的条件, 能够刻画函数在整个邻域里面的信息, 并且这个性质是比连续性更好的, 就像一元函数里面一样. 这就需要考虑一元函数的导数的本质: 即函数在一点附近, 函数值之间的距离和自变量之间的距离近似有线性关系 $\Delta y = f'(x)\Delta x$. 或者说, 在自变量变化 Δx 的情况下, 函数值的变化主要由一个线性变化 $f'(x)\Delta x$ 给出. 这个定义可以自然拓展到多元的情况.

定义 2 (全微分与可微性)**.** 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 如果存在常数 A,B 使得

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}), \tag{1}$$

则称 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处可微, 并记 f 在 P 处的全微分为

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

注 3 (可微与连续, 可导的关系)**.** 根据定义可以直接得到 "可微 ⇒ 连续", 因为当 Δx 与 Δy 趋于 *0* 时, (1)的右边收敛到 0. *(注意这里我采取了方形邻域的说法, 如果改用圆形邻域则要说当* $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ *趋于* 0 *时)*.

在(1)中令 $\Delta y=0$, 两边同时除以 Δx 并令 $\Delta x\to 0$, 就得到 f 在 P 处对 x 存在偏导数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=A$. 同理有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=B$. 所以 "可微 ⇒ 可导". 由以上结果也可以看出, 求函数的全微分本质上就是求函数的偏导数, 因此计算上也是简单的.

注 4 (总结)**.** 可微 ⇒ 连续, 可微 ⇒ 可导, 可导 + 偏导数连续 ⇒ 可微, 连续和可导互相不能推出.

定义 3 (复合函数微分)**.** 设二元函数 $z=f(u,v)$, 且 u,v 均为关于 x,y 的二元函数*:* $u=g(x,y),v=h(x,y)$, 则 z 也可以写成关于 x,y 的二元函数*:* $z=f(u,v)=f(g(x,y),h(x,y))\triangleq F(x,y)$. 以下等式成立*:*

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2}$$

注 5 (如何理解)**.** *以上的定义中出现了很多的字母, 我们应该如何理解它们的含义, 以及不同的记号之间怎么区分?*

这里面 x,y,u,v,z 都是变量, 就像一个指标, 比如人的身高, 公司的收入, 国家的人口等等. 其中 x,y 是第一层的, 它们会影响 u,v 这两个第二层的, 而 u,v 又会影响 z 这个第三层的. 而 f,g,h,F 都是函数 *(再次回忆函数的本质, 是一个作用机制, 一个自变量如何影响因变量的逻辑)*. 我们用 g,h 表示一层变量 x,y 如何影响二层变量 u,v, 用 f 表示二层变量 u,v 如何影响三层变量 z. 但是这个影响当然是有传递性的, 所以也可以描述一层变量 x,y 如何 *(通过二层变量* u,v*)* 影响三层变量 z, 这就由函数 F 来表示.

回忆偏导数的概念, 其实就近似于表示了一个自变量如何影响因变量. 因此等式(2)的意义可以看成是, 怎么通过这两层影响的强度来表达这个跨层影响的强度. 这里 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ 就表示在 F 这个影响机制下, x 的变动程度. 由于 F 是描述 x,y 对 z 的影响, 因此这也可以写成 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 这样来看(2)其实就是一个直观的 "影响叠加" 的公式.

如何记忆(2)中每个函数对谁求偏导, 其实只需要看这个函数依赖于什么变量 *(或理解成 "认识谁")*. 比如 z 作为变量, 它当然对 x,y,u,v 都有依赖性. 但 f 作为对 u,v 如何影响 z 的刻画, 它是 "不认识" x,y 的, 所以切记不能写出 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 这样的记号.

注 6. 如果习惯微分的写法, 以上等式其实是比较自然的*:*

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\Big)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y\Big).$$

按照 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的系数整理一下就得到上面的等式.

思考 1. *在必要的时候, 一定要区分 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 设二元函数 $z=f(x,y)$, 且 $y=g(x)$ 为关于 x 的函数, 则 z 也可以写成关于 x 的函数: $z=f(x,g(x))$. 如何计算 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$? 它等于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 吗?*

2 多元函数条件极值

定义 4 (拉格朗日乘数法)**.** *为求二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点, 构造辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$, 则极值点所满足的必要条件是*

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial\lambda}=\varphi(x,y)=0.$$

注 7 (多元函数)**.** *如果涉及到三元及以上的函数, 有可能有多个约束条件, 一般的情况是多元函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$, 约束条件 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\cdots,\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)=0$. 此时我们需要对每个约束条件都引入一个 λ_i, 对应构造的辅助函数是*

$$F(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=0.$$

极值点所满足的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial\lambda_j}=\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)=0.$$

尽管形式上更加复杂, 但思想方法是一致的, 即使看到多元函数或者多个约束条件也不用担心无法处理.

注 8 (验证极值点)**.** *拉格朗日乘数法所给出的只是极值点的必要条件, 通常情况下如果解出了唯一解, 题目也是要求极值点, 则可以不必额外验证. 如果解出来的解不唯一, 且它们对应的函数值不同, 则有可能需要排除掉一些. 回忆如何证明一个点不是极值点: 要说明 P 不是极小值点, 则要说明在 P 的任意小邻域内, 都存在满足约束条件的点 Q 使得 $f(Q)<f(P)$. 换言之, 即存在一列点 P_k 趋于 P, 且 $f(P_k)<f(P)$ 对每个 k 均成立.*

注 9 (如何求解)**.** *求解拉格朗日乘数法给出的方程组有时并不容易, 特别是如果多元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 中包括复杂的根号或者乘积结构, 则求完偏导之后形式可能非常复杂. 常见的技巧是取平方或者取对数, 从而消去根号或者将乘积变成求和, 因为 f 的极值点和 f^2 或者 $\ln f$ 的极值点总是一样的. 这个方法同样也适用于一般极值的求法.*

问题 3 (习题五第 17 题)**.** 当 n 个正数 $x_1,\cdots,x_n$ 的和为常数时, 求它们乘积开 n 次根的最大值.

方法 1. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a$, 则要求极值的多元函数为 $f(x_1,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$, 约束条件为 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a=0$. 考虑构造的辅助函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,\cdots,x_n)-\lambda\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i-\lambda\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j}\prod_{i=1}^{n}x_i-\lambda=0.$$

故 $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n} x_i$. 结合 $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ 得到 $x_i = \dfrac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\dfrac{a}{n}$. □

方法 2. 设 $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, 注意到 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 取到最大值等价于 $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ 取到最大值, 则要求极值的多元函数为 $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$, 约束条件为 $\varphi(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - a = 0$. 考虑构造的辅助函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\lambda) = f(x_1,\cdots,x_n) - \lambda\varphi(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\Big)$, 对 x_j 求偏导得到

$$\frac{1}{x_j} - \lambda = 0.$$

故 $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{\lambda}$. 结合 $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ 得到 $x_i = \dfrac{a}{n}$, 此时所求最大值为 $\dfrac{a}{n}$. □

问题 4 (习题 5 第 13 题第 (2) 问)**.** *求函数 $u = xyz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0$ 下的极值.*

证明. 由于 (x,y,z) 满足约束条件等价于 $(-x,-y,-z)$ 满足约束条件, 且它们对应的 u 互为相反数, 故 u 的极大值即为 $|xyz|$ 的极大值, 极小值即为其相反数. 同样可以采用取对数法, 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu) = \ln|x| + \ln|y| + \ln|z| - \lambda(x^2+y^2+z^2-1) - \mu(x+y+z)$, 求偏导得到

$$\frac{1}{x} - 2\lambda x - \mu = 0, \qquad \frac{1}{y} - 2\lambda y - \mu = 0, \qquad \frac{1}{z} - 2\lambda z - \mu = 0.$$

三式分别乘上 x,y,z 求和得到 $\lambda = \dfrac{3}{2}$. 代入得 $\dfrac{1}{x} - 3x = \dfrac{1}{y} - 3y = \dfrac{1}{z} - 3z$. 因式分解得到 $x = y$ 或 $xy = -\dfrac{1}{3}$, 对 y,z 和 z,x 也同理. 由于不可能 $x = y = z$, 故必然是两个相等且与第三个乘积为 $-\dfrac{1}{3}$. 不妨设 $x = y = -\dfrac{1}{3z}$, 代入得 $x = y = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, z = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ 或者 $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}, z = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, 分别对应极大值和极小值. 所有的极值点即为以上坐标的全部轮换. □

注 10. *不用取对数法也可以类似地证明, 但个人感觉计算会麻烦一些, 详见参考答案. 对于这种三个变量具有完全对称地位的函数和约束条件问题, 通常来说会得到 x,y,z 同时满足某个相同的方程, 但是不能由此认为 $x = y = z$ 或者至少两个相等, 需要借助其它方法.*

注 11. *在实际问题当中, 约束条件有可能没有通过明显的表达式给出, 此时需要自行转化, 这时需要仔细阅读题目中给出的约束条件, 列出正确的表达式. (其实这正符合实际科研和生产生活的需求) 如习题五第 14 题中的长方体是半球内接, 许多同学当作球内接来做, 会得到错误的约束条件和结果.*

3 二重积分的计算

二重积分是一个非常复杂的定义. 在本课程中所要求的所有二重积分计算, 都可以化归成所谓累次积分的计算, 也就是对于二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 我们总是把区域 D 写成 $x \in [a,b], y \in [y_1(x), y_2(x)]$ 的形式 (或者反过来), 也就是在 xy 平面上, 先用 $x = a, x = b$ 两条竖线框住 D 的左右边界, 然后再对每个

x, 算出 y 的上下限. 然后将积分变成

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

积分时先算后面对 y 的积分, 此时所有的 x 都看成无关的常数系数, 积出来得到关于 x 的函数再做一次积分.

特别地, 在用二重积分计算空间立体体积时, 不需要能够想象出三维图形, 只要能画出平面上的积分区域 D 的形状, 就可以计算了.

注 12. *二重积分的题型主要分为三种: 直接求积分, 求平面图形面积, 求空间立体体积. 第一种就是累次积分的正常计算, 第二种就是在该区域上积分 1 这个函数, 第三种则是要先画出该空间立体在 xy 平面上的投影区域 D, 然后在 D 上求一个二重积分, 被积函数 $f(x,y)$ 就是这个空间立体在 (x,y) 点处的高度, 也就是围成该空间立体的两个曲面 z 坐标的高度差.*

问题 5 (习题五第 18 题第 (3) 问)**.**

$$\int\int_D (y+x^2)\mathrm{d}\sigma.$$

其中 D 是由 $y=x^2, y^2=x$ 围成的区域.

问题 6 (习题五第 19 题第 (1) 问)**.** *计算曲线 $y=x^2, y=x+2$ 围成的平面图形的面积.*

问题 7 (习题五第 20 题)**.** *计算由曲面 $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.*

问题 8 (习题五第 20 题变式)**.** *计算由曲面 $z=\frac{1}{2}-x-y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$ 所界的空间立体的体积.*

4 结束语

4.1 期末考试注意事项

期末考试时间为 1 月 4 日 (星期日) 早上 8:30-10:30, 地点为二教 105, 考试范围是教材除附录外所有内容 (期中考前部分不单独出题考察), 两个班统考统一批改. 同期中考试一样, 考试结束后会立刻改卷, 当天下午即可完成批改. 期末卷面分可能不会单独公布, 最后只公布总评成绩.

关于考试的具体注意事项, 参考第四次习题课讲义的期中考试注意事项部分. 特别地, 根据教务要求, 期末成绩不能调整, 提交给教务的分数必须与卷面登分保持一致, 因此请大家务必认真复习, 细心答卷, 不要空题, 解答题即使不会做也要将所有的思路和相关的结论写上去, 便于我们给分.

特别提醒: 如果有同学考完试后发现自己有挂科的风险 (总评不及格, 而不是卷面不及格), 请及时告诉我或联系老师.

4.2 其它注意事项

平时作业的成绩大家不需要担心, 只要交齐了作业, 我最后都会记成满分, 之前登记分数时扣分只是为了让大家知道自己作业的对错情况. 我会在这两天匿名发布全部 11 次作业的提交情况, 供大家自行核对, 欠交的作业只要在考前补交上来, 都可以算作正常提交. 考试之后不再接受补交作业.

另外, 麻烦大家在复习期间放松的时候, 顺手填一下课程评估, 你们的建议和意见将是我未来助教工作的重要参考.

4.3 说在最后的话

4.4 祝大家期末顺利!