2025 秋高等数学 D 第六次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 11 月 25 日

1　不定积分综合讲解

在上一次课中, 我们已经介绍过不定积分的定义, 并着重强调了原函数与不定积分这两个概念的辨析. 这里再简要回顾一下: 从定义上看, 原函数是一个具体的函数, 它的求法对应的就是求导函数的逆运算; 不定积分是指全体原函数, 本质上是一个由函数构成的集合. 然而基于以下的事实: 两个函数具有相同的导函数, 则它们相差一个常数; 我们知道不定积分一定可以表示成一个原函数 $+C$, 所以归根结底还是只要求出一个原函数即可.

再次强调最后一定要 $+C$!

在理清我们的目标之后, 今天我们综合介绍求不定积分的各种方法和技巧, 并说明对于什么样的函数大概会采用什么样的方法. 对于大多数同学来说, 解不出一道不定积分不是因为知识上的欠缺, 而是拿到题目不知从何下手, 不知用什么方法往什么方向处理, 这和之前求极限的情况非常类似. 这个问题需要客观认识: 一方面, 包括求极限求不定积分在内的大多数数学问题, 本就没有一招鲜吃遍天的通法, 因此不可能指望有什么法宝秘籍能让我们看到一个极限或一个积分马上就知道怎么算, 我们能做的只有不断提高各种方法和计算的熟练程度, 让自己的武器库更加充实, 每一次尝试的效率更高; 另一方面, 数学的思维总是强调如何把未知的问题转化为已知的问题, 所以我们可以总结出一些常见的处理方法, 能够把题目中的问题不断简化, 同时通过不断的积累让自己已知的问题越来越多.

1.1　基本不定积分

前面提到, 一切复杂的积分都是要简化成我们熟悉的简单情况, 就像再复杂的复合函数求导最后都落实到基本初等函数的求导一样, 我们首先必须将基本的不定积分彻底熟练掌握.

$$\int 1\mathrm{d}x = x + C. \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C. \tag{2}$$

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1). \tag{3}$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C. \tag{4}$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1). \tag{5}$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C. \tag{6}$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C. \tag{7}$$

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C. \tag{8}$$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C. \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C. \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C. \tag{11}$$

这 11 个不定积分必须牢牢记住, 形成肌肉记忆, 因为它们是构建自己武器库的最底层的部分, 只有熟练掌握才能进一步往上搭台. 而且要注意的是, 所谓牢牢记住不是说只记住这些不定积分的形式, 而是看到这 11 个函数要马上想到它们的原函数长成右边的形式, 这对于后面换元法和分部积分法的使用时机的判断至关重要.

注 1. (2)中必须写成 $\ln|x|$ 而不能省去绝对值, 否则定义域不同.

注 2. (3)中注意原函数的幂次始终比被积函数多 1, 如果幂次是负数, 对应的也是幂次 $+1$ 而不是幂次绝对值 $+1$.

注 3. (8)和(9)中被积函数是平方形式, 但原函数没有平方.

注 4. (11)中右端原函数有两种常见写法, 即写成 $\arcsin x$ 或 $-\arccos x$. 因为这两个函数的值始终相差 $\pi/2$, 因此 $+C$ 之后对应的不定积分是相同的.

以上基本不定积分的第一个常见推广就是, 把被积函数中的 x 变成 $ax+b$ 的形式, 比如

$$\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x, \quad \int (ax+b)^\alpha \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{1+(ax+b)^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}\mathrm{d}x,$$

这是因为只要做换元 $u = ax+b$, 由于 $\mathrm{d}u = a\mathrm{d}x$, 整个问题立刻化归到前面的情况. 现在我们的武器库已经从最开始的 11 个积分充实到它们经过线性换元得到的所有形式. 根据具体题目中被积函数的形式, 可以考虑能不能凑出形式接近的对应基本不定积分. 此外, 我们还可以结合一些恒等变形进行处理.

问题 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x.$$

问题 2.

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\mathrm{d}x.$$

问题 3.

$$\int \frac{1}{x^2-4}\mathrm{d}x.$$

1.2 第一换元法

换元法实际上都是利用复合函数求导的链式法则, 来达到简化被积函数的形式的目的. 第一换元法也叫凑微分法, 侧重于从被积函数中 “删掉” 一些多余的项, 把它们 “吃” 到微分后面去, 这需要对常见微分的写法比较熟练:

$$a\mathrm{d}x = \mathrm{d}(ax+b), \quad x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}x^2\Big), \quad e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}e^x, \quad \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x.$$

从中也可以看出, 上面这些写法其实就是对被积函数中要被 “吃掉” 的那部分先做不定积分, 然后再考虑换元之后的形式. 这也是为什么一定要对 11 个基本不定积分掌握非常熟练. 特别是熟练运用

$$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cos x, \quad \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x,$$

对于处理只带三角函数的不定积分非常有效.

问题 4.

$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

问题 5.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}\mathrm{d}x.$$

问题 6.

$$\int x\sin(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

1.3 第二换元法

第二换元法侧重于往被积函数中 “添加” 一些新的项, 或者直接改变被积函数的形式. 最常见的有两种: 其一是前面提到过的线性变换 $x = ay+b$, 适合处理形式上接近 11 个基本不定积分但系数稍有不同的情况; 其二是三角换元, 适合处理带有根号的不定积分.

$$\int \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sqrt{2}y)^2+2}\mathrm{d}(\sqrt{2}y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)+C.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\cos t) = -\int \sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos(2t)-1\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{\arccos x}{2} + C.\end{aligned}$$

通常来说遇到 $\sqrt{1-x^2}$ 则用 $x = \cos t$ 换元 ($t \in [0,\pi]$, 可以保证 $\sin t \geq 0$), 遇到 $\sqrt{1+x^2}$ 则用 $x = \tan t$ 换元, 遇到 $\sqrt{x^2-1}$ 则用 $x = 1/\cos t$ 换元.

注 5. *三角换元 $x = \sin t$ 等虽然是很有效的工具, 但是由于三角函数的周期性, 我们对反三角函数是有值域的限制的:*

$$\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \quad \arccos x \in [0,\pi), \quad \arctan x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$$

如果不加以说明, 换元之后变量 t 的取值范围就可能有歧义, 也容易在后面的计算中误导自己, 因此希望大家都要写出 t 的取值范围. 特别地, 因为原来的积分变量 x 一般来说不是正数, 所以不要通过画直角三角形的方式来说明.

问题 7 (习题四第 4 题第 (17) 问)**.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x.$

错误解答. 令 $x = a\sec t$, 则 $\mathrm{d}x = a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int \tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= a(\tan t - t + C).\end{aligned}$$

又 $t = \arccos\dfrac{a}{x}$, $\tan t = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

□

注 6. 本次作业几乎所有同学本题都是采用以上的写法, 问题就出在换元之后的第一步变换, 因为 t 的取值范围是 $[0,\pi)$, 对应地 $\tan t$ 有正负两种取值, 分别对应 x 的正负两种取值, 所以拆开根号之后实际上得到的是 $|\tan t|$. 这时就需要分类讨论, 得到的结果也是分段的, 当然可以从形式上将其合并, 但这是三角换元常见的问题.

注 7. 之所以强调求完积分之后要求导验算, 就是因为这里如果进行一步验算就会发现, 当 $x<0$ 的时候这个结果求导后不等于原来的被积函数.

正确解答 *1.* 令 $x = a\sec t$, $t\in[0,\pi)$, 则 $\mathrm{d}x = a\tan t\sec t\mathrm{d}t$. 当 $x>a$ 即 $t\in[0,\dfrac{\pi}{2})$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int \tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= a(\tan t - t + C).\end{aligned}$$

又 $t = \arccos\dfrac{a}{x}$, $\tan t = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

当 $x<-a$ 即 $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时, 代入得

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int\cos t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t\\ &= a\int-\tan^2 t\mathrm{d}t\\ &= -a(\tan t-t+C).\end{aligned}$$

又 $t=\arccos\frac{a}{x}$, $\tan t=-\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, 则所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}+a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

综上, 所求不定积分等于

$$\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C.$$

□

正确解答 2.

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x &= \int\frac{x^2-a^2}{x^2}\mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2}\\ &= \int\frac{t^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t\quad(t=\sqrt{x^2-a^2})\\ &= a\int\frac{y^2}{y^2+1}\mathrm{d}y\quad(t=ay)\\ &= a(y-\arctan y+C)\\ &= t-a\arctan\frac{t}{a}+C\\ &= \sqrt{x^2-a^2}-a\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C.\end{aligned}$$

□

1.4 分部积分

分部积分是最常见的处理复杂积分的方式, 某种程度上它允许我们自由地把一些丑陋的东西移到微分后面去让它求导. 因此它常常跟第一换元法捆绑出现.

如果被积函数中出现对数函数 $\ln x$, 反三角函数 $\arctan x,\arcsin x,\arccos x$ 等函数, 我们称之为"丑陋但求完导好看的东西", 就可以考虑把剩下的部分用第一换元法"吃"到微分后面去, 然后用分部积分把这部分东西转移到微分后面, 从而消除掉它们的形式. 如果没有剩下的东西, 那就直接使用分部积分.

如果被积函数出现指数函数 e^x, 而剩下的部分求导很好看, 则可以反复利用 $e^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}e^x$ 把它"吃"过去然后分部积分, 让剩下的部分不停求导.

如果被积函数出现 x 乘上一些只跟三角函数或者指数函数有关的东西, 可以考虑把后面这些东西"吃"过去 (因为通常来说这部分可以用第一换元法), 然后分部积分, 从而把 x 消掉.

问题 8.

$$\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

问题 9.

$$\int x^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

问题 10.

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x.$$

问题 11.

$$\int x^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

解. 记所求不定积分为 $I_n(x)$. 由分部积分,

$$I_n(x)=-\int x^n\mathrm{d}(e^{-x})=-x^ne^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}(x^n)=-x^ne^{-x}+n\int x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

即我们有

$$I_n(x)=-x^ne^{-x}+nI_{n-1}(x). \tag{12}$$

在(12)中用 $n-1$ 替换 n, 则有

$$I_{n-1}(x)=-x^{n-1}e^{-x}+(n-1)I_{n-2}(x). \tag{13}$$

联立(12)(13)得

$$I_n(x)=-x^ne^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}+n(n-1)I_{n-2}(x). \tag{14}$$

观察(12)(14)可得规律, 即每一项均为 $-n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}e^{-x}$, 其中 k 为非负整数. 因此可得

$$I_n(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}e^{-x}+n!I_0(x).$$

注意到 $I_0(x)=-e^{-x}+C$, 则有

$$I_n(x)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}e^{-x}+C.$$

也可以整理成

$$I_n(x)=-n!\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}+C.$$

可利用求导验算:

$$\begin{aligned}
I_n'(x)=&-n!\sum_{k=0}^{n}k\frac{x^{k-1}}{k!}e^{-x}+n!\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\\
=&-n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}e^{-x}+n!\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\\
=&n!\frac{x^n}{n!}e^{-x}=x^ne^{-x}.
\end{aligned}$$

□

注 8. 本题完整计算难度较大, 且需要对递推式和求和公式比较熟悉, 应该已经超过本课程要求. 大家掌握其中通过反复 "吃掉"e^{-x} 从而实现对 x^n 不停求导降次的思想即可.

问题 12.

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x.$$

解. 思路是希望通过第一换元法, 将 $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ “吃” 过去, 然后使用不定积分. 为此, 先求 $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ 的原函数.

由第一换元法, 令 $u=e^x$, 则有

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}(e^x)=\int (1+u)^{-1/2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(1+u)^{1/2}+C=\frac{\sqrt{1+e^x}}{2}+C.$$

故在原不定积分中, 我们有

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\frac{\sqrt{1+e^x}}{2}=\frac{x\sqrt{1+e^x}}{2}-\frac{1}{2}\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

为求上式最后一项不定积分, 作换元 $u=\sqrt{1+e^x}$, 则 $x=\ln(u^2-1)$,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}\ln(u^2-1)=\int \frac{2u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u&=\int 2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u\\&=2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C\\&=2\sqrt{1+e^x}+\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.\end{aligned}$$

故原不定积分等于

$$\frac{x\sqrt{1+e^x}}{2}-\sqrt{1+e^x}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$$

□

注 9. 本题难度同样较大, 主要在于第一步换元法的思维量和计算量不小, 且换元分部积分后得到的简化后的不定积分同样也不好求. 大家同样以理解思想为主.

注 10. 本题第二步处理 $\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ 采用的方法比较特殊, 是将整个被积函数整体换元, 以牺牲微分符号 d 后面表达式形式的代价, 将被积函数暴力简化, 并指望 d 后面的 x 换元求导之后形式更加简单. 此方法常用于处理被积函数是单独一个根号下面复杂函数的情况, 值得积累.