2025 秋高等数学 D 第五次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 11 月 11 日

1　单调, 极值, 最值, 凹凸

在课程刚开始的时候我们曾经提到, 如何回答高等数学这门课的目的这样一个问题: 高等数学课程的主要内容, 就是通过极限, 导数, 积分这三个基本工具, 研究一系列抽象函数的性质. 对于连续函数, 我们总结出最本质的性质就是最值定理和中间值定理及其推论. 而对于更好的可导函数, 借助于导数, 我们就可以研究一系列新的性质, 如前面提到的罗尔中值定理, 拉格朗日中值定理等, 而作为应用, 我们就可以以此分析函数的单调性, 极值点, 最值点, 凹凸性等. 这就是课本第三章最后两节的内容.

按照惯例, 这一部分不会是考试的重点, 最多也只会考察一下基本的定义和计算, 而且这里的内容大家高中也有所接触, 所以这里只作简要的概述.

1.1　单调

在本课程的教材中, 单调递增指的是高中时期所提到的严格单调递增, 即对于任意 $x > y$, 必须有 $f(x) > f(y)$ 而不能取等, 单调递减同理.

课本中提到的一个重要判别标准是, 若 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 单调递增. 这个结论大家在高中时期已经熟练运用. 下面我们思考一些变式.

问题 1. *判断以下说法是否正确:*

(1) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x) > 0$ 在 (a,b) 上恒成立.

(2) 可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增的充要条件是 $f'(x) > 0$ 在 (a,b) 上恒成立.

在数学中, 一个结论的判别标准 (criterion) 通常是这个结论的充分条件, 也就是这一标准成立就能推出结论成立, 但它不一定是必要条件, 或者说结论不一定与它等价, 又或者说结论可以在更广泛的意义下成立. 上面的问题有助于大家理解这一思想.

结合单调性的判别标准和连续函数的中间值定理, 我们还可以综合处理一些问题.

问题 2 (2025 秋高等数学 B 期中最后一题)**.** *设函数 $f(x) = x^8 - x^4 - \cos x$, 求 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数.*

1.2　极值与最值

最大值与最小值的概念大家已经熟悉, 现在我们新引入了一个极值的概念, 从定义上看, 所谓极值点其实就是局部意义下的最值点. 我们当然可以理解, 一个函数的最值点有很重要的意义 (尤其是在实际问题中), 比如说一段时间内人口峰值, 最大收入, 流量低谷等概念, 那么极值点就可以理解成一小段时间内的对应现象. 从而对于极值点的研究也是必要的.

我们先回顾一下课本给出的可导函数的极值点的判别标准. 与单调性不同, 这里书上既给出了必要条件, 也给出了充分条件.

定理 1 (极值点的必要条件)**.** *设函数 $f(x)$ 可导, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点的必要条件是 $f'(x_0) = 0$.*

定理 2 (极值点的充分条件)**.** *设函数 $f(x)$ 可导, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点的充分条件是 $f'(x_0) = 0$, 且存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使得 $x \in U^+(\bar{x_0})$ 时 $f'(x) < 0$, $x \in U^-(\bar{x_0})$ 时 $f'(x) > 0$. 极小值点反之.*

定理 3 (极值点的充分条件)**.** *设函数 $f(x)$ 二阶可导, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点的充分条件是 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) < 0$. 极小值点反之.*

以上条件大家可以通过简单的画图来记忆. 通常来说, 必要条件用于求出可能的极值点 (先用等式把极值点可能的范围算出来), 充分条件用于判断上一步求出来的点是不是真的是极值点. 课本也介绍了鞍点的定义, 也就是由定理1确定的所有点.

下面同样思考一些变式.

问题 3. *判断以下说法是否正确:*

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0) = 0$.

(2) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处取到极值的充要条件是 $f'(x_0) = 0$.

(3) 可导函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处取到极值的必要条件是 $f'(x_0) = 0$.

(4) 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有定义, $x_0 \in (a, b)$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则存在 x_0 的邻域 U, 使得 $f(x)$ 在 x_0 处取到 U 上的最值.

1.3 凹凸

凹凸性是这门课程中新引入的一个重要概念, 无论是在数学研究还是在其他领域的应用 (如经济学和定量社会学研究) 当中都十分常见. 我们先从课本上的定义和判别标准讲起.

定义 1 (凹凸)**.** *若曲线弧位于它每一点的切线上方, 则称此曲线弧是凹的, 若曲线弧位于它每一点的切线下方, 则称此曲线弧是凸的.*

这里需要对这个定义做一些说明.

其一, 这并不是一个严谨的数学定义. 从数学的角度看, 所谓位于上方等词语是不严谨的, 至少应该用数学表达式重写. 但这样描述有利于大家的理解.

其二, 这个定义并不是最标准的凹凸性的定义. 比如这里默认了函数有图像且是一段曲线弧 (当然也没说什么叫曲线弧), 还默认了每一点处都有切线. 但实际上凹凸性可描述的函数不止这些.

其三, 如果大家在其他书上或者视频中看到凹凸性的定义, 有可能会与书上的刚好相反, 也就是前者叫凸函数, 后者叫凹函数. 实际上这才是正确的叫法, 课本的写法是与主流不合的, 但在这门课中我们以教材为准.

定理 4 (凹凸性的判别标准)**.** *设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上二阶可导. 若 $f''(x) < 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 是凸函数, 若 $f''(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 是凹函数.*

从这个判别标准可以看出, 所谓凹凸性也近似于描述了函数的导数的单调性, 也就是说凹凸性可以看成是单调性的下一层延伸. 我们借助图像来理解, 如 $f(x) = \sqrt{x}$ 是单调递增的凸函数, 则可以看出 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 是单调递减的, 也就是说函数是上升的, 但上升速度是下降的. 这跟我们所熟知的调分函数

$f(x) = 10\sqrt{x}$ 对大家的影响是一样的, 也就是大家的分数都会变高, 但考得越高的人分数变高的幅度越小. 另一个例子就是我们的绩点函数 $f(x) = 4 - \frac{3(100-x)^2}{1600}$. 同等变化分数的情况下, 考的分数越低的人, 绩点受影响越大, 这也就是为什么老生常谈一门课的低分要十门课的高分来补.

一个笑话: 如何利用四阶导数研究房价变化. 2017 年 5 月 5 日广州从化发布: 我区多举措加强房地产调控力度, 楼价快速上涨趋势得到有效遏制.

对于凹凸性的研究, 基本不会涉及到不是二阶可导的情况, 因此这里不再进行概念辨析.

2 不定积分的基本概念

第四章主要讲的是积分的概念, 分为定积分和不定积分两类. 中学时期大家也许已经接触过积分的运算, 比如了解到定积分大概是函数图像围成的面积, 然后可以用牛顿-莱布尼茨公式计算. 但现在我们需要重新了解这两部分内容, 且必须要强调的一点是, 从定义的本质上看, 定积分与不定积分是完全不一样的事物, 这会在后面讲到定积分时重新解释. 定积分是非常复杂的一个概念.

我们首先学习不定积分的内容, 这一部分相对简单. 大致来说, 求不定积分就是求导的逆运算, 之前是给定函数求它的导数, 现在是要找什么东西求完导等于它. 我们先来进行概念辨析.

定义 2 (原函数)**.** *函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)(x \in X)$ 的一个原函数, 如果对 $\forall x \in X$, 都有 $F'(x) = f(x)$.*

定义 3 (不定积分)**.** *函数 $f(x)$ 的不定积分是指它的全体原函数, 记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.*

命题 1 (原函数的刻画)**.** *如果 $F(x)$ 是 $f(x)(x \in X)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.*

根据定义, 不定积分是全体原函数, 所以会有我们老生常谈的 $+C$ 问题. 也就是说, 我们求不定积分, 实际上是算出一个具体的原函数, 然后用它 $+C$ 来表示全体的原函数, 也就是不定积分. 一定要注意因为这个 $+C$ 的存在, 所以前面求出的原函数在相差一个常数的情况下都是对的.

换句话说, 原函数有无穷多个, 我们写出来的时候只是挑了一个作为代表元, 那么自然也有无穷多种挑法. 所以不定积分的结果从形式上看肯定有多种写法. 就像前面所学的隐函数求导一样, 不必追求答案形式的统一, 我们改卷时自然会去验证你的答案与标准答案是不是相差一个常数.