2025 秋高等数学 D 第四次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 10 月 28 日

1　导数部分常见题型

1.1　根据导数定义计算复杂极限

我们回忆函数的导数的定义:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

由此可见, 导数的定义是离不开极限的计算的. 这也衍生出另一类型的题目: 在求一个抽象函数的复杂极限时, 可以考虑通过变形凑出类似于上式右边的形式, 从而将所求极限转化为某一函数的导数.

问题 1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)>0$, 求极限

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)} \right)^x.$$

注 1. 回忆上次课所提到的取对数法处理 x^x 型极限.

1.2　x^x 型函数导数的直接计算

常见函数的导数计算相对来说是大家比较熟悉的内容. 这一部分的主要难点在于幂指函数 x^x 型函数的导数的计算. 课上老师讲过两种方法, 不过个人推荐大家采用取对数法, 相对来说不用记忆复杂的公式.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

这里的隐患在于大家可能在做第二步时, 会忘记 y 是关于 x 的函数, 从而写不出 $(\ln y)' = y'/y$ 这一步. 但是这个隐患本身在隐函数求导时也很容易出现, 所以不如就用心把这件事记住, 把这个方法用好.

问题 2 (2024 期中)**.** 设函数 $f(x) = \left(\sin \dfrac{1}{x}\right)^{\sin \frac{1}{x}}$, 求导数 $f'\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

1.3　分段函数求导

在许多题目中, 都会涉及到一个分段定义的函数的连续性或可导性问题. 函数在每一段上通常都是初等函数的形式, 所以不需要额外的讨论, 但是在分段的端点处, 因为函数在左右两边的性态是由两个不同的表达式给出的, 所以一定要通过定义去讨论这一点处的极限连续性/可导性/导数等概念, 不能想当然利用函数表达式直接形式计算.

问题 3 (习题二第 9 题)**.** *设* $f(x)=\begin{cases}1-e^{2x}, & x\le 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$ *求* $f'(x)$.

这里定义的分段函数 f 里面 0 是分段的端点, 所以对于 $x<0$ 和 $x>0$ 都可以直接形式上求导得到, 但在 $x=0$ 处不能直接下结论:

$$f'(x)=(1-e^{2x})'=-2e^{-2x}.$$

这是因为这样的形式计算有一个底层逻辑, 就是函数在 0 的左右两边都按照 $1-e^{2x}$ 的形式来变化, 但这里 $f(x)$ 在 0 的右边由另一个函数来描述. 直接按照定义可以验证 $f(x)$ 在 0 处左右导数不相等, 故不可导.

问题 4 (2024 期中改)**.** *设* $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0;\\ 0 & \end{cases}$ *在* $(-\infty,+\infty)$ *上可导. 求* α *的取值范围.*

1.4 洛必达法则相关概念辨析

在高等数学 D 的课程中, 导数的计算是一个重要专题, 而由此产生的一个重要工具就是洛必达法则, 其作用范围之广, 效果之强, 从它的名声之大可见一斑. 但是它的使用条件实际上常常被大家所忽略, 这里我们通过一道作业题来讨论.

问题 5 (习题三第 9 题)**.** *求下列各极限, 并指出能否使用洛必达法则? 为什么?*

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; *(2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

我们回顾洛必达法则的适用条件: 如果极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 不能直接通过连续函数代入的方法求出极限, 则可以对上下同时求导, 如果此时得到的极限存在, 则原极限也存在且极限值相等. 以上的条件缺一不可.

这也就意味着: 其一, 如果所要求极限的函数的形式不是 $\dfrac{0}{0}$ 或者 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的形式, 是不可以使用洛必达法则的. 简单的例子:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.$$

这一极限显然等于 0. 但如果错误地使用洛必达法则, 上下求导得到极限为 1, 虽然此时极限存在, 但也不等于原来的所求极限. 其二, 如果对所要求极限的函数上下求导后, 得到的新函数极限不存在, 则没办法继续使用洛必达法则. 而此时也不能断言, 原来所求的极限不存在. 换言之, 洛必达法则是一种退而求其次的尝试, 原来的问题太难无法处理, 我们尝试退一步看看能不能解决, 但如果退完是一条死路, 那我们只有回到原问题想别的办法. 不能说退完是死路, 那原来也是死路. 比如这道习题.

错误解答 1: 判断错误. 题中函数分子分母在定义域内都可导, 且所求极限都是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 所以可以使用. □

错误解答 2: 理由错误. 部分同学的判断正确, 但是说明的理由有误.

· 不能使用, 因为 $1-\cos x$ 和 $1+\cos x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡/没有极限/不能确定/分母可能为 0.

· 不能使用, 因为分子分母在定义域内不是处处可导.

· 不能使用, 因为 $\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时振荡. □

1.5 洛必达法则在计算中的应用

对于形式过于复杂的极限, 常规办法几乎无法处理, 那么只要验证了满足前面所说的使用条件, 大家尽可以放心地运用洛必达法则. 当然一个直观的理解是, 用完之后我可以做到一些化简, 比如分子或者分母变成非 0 非无穷的形式, 或者复杂的函数被化简了.

问题 6 (2018 期中)**.** *计算极限*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}.$$

有时也会遇到多次使用洛必达法则的情况.

问题 7 (习题三第 8 题 (10)(12))**.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$; $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{5x}}$.

这两道题都是典型的多项式/指数型的极限, 本质上是要利用指数函数求导不变, 而多项式有限次求导为 0 的性质去多次运用洛必达法则. 在书写过程的时候, 我们要将这个多次求导的过程展现出来, 不能笼统地写大白话. 对于 (10) 这种变形的结构, 还要找到合适的转化方法.

错误解答. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{100x^{99}}=...=0.$ □

注 2. *如果直接对原来的函数上下求导, 由于分子会创造出来一个* $\dfrac{2}{x^3}$, *其中的* x^3 *会乘到分母上去, 所以分母的多项式次数反而会不断增大, 这样最后是得不到答案的. 这也是大家一定要把每次求导之后的结果写清楚的原因.*

正确解答. 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}=...=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0.$ □

正确解答. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{5e^{5x}}=...=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{5^ne^{5x}}=0.$ □

对于不直接表现为一个分式的函数极限来说, 也可以通过适当换元或者变形, 转化为分式的极限, 再去运用洛必达法则. 对于加减法来说通常先通分 + 无穷小量替换简化形式, 对于乘法来说则想办法把 $a\cdot b$ 变成 $\dfrac{a}{1/b}$ 或者 $\dfrac{b}{1/a}$, 具体选择哪个取决于哪个适合求导.

问题 8. *设 n 为正整数, 求极限*

$$\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x.$$

1.6 罗尔定理的应用

回忆一下, 之前对于有界闭区间上的连续函数, 我们得到了最值定理和中间值定理两个非常有力的结论, 从而很好地刻画了连续函数的特点, 在许多关于抽象连续函数的证明中都需要用到这两个结论和它们的推论.

那么如果把条件加强到可导, 对应的就是罗尔定理的结论, 它给予我们判断一个抽象函数的导数存在零点的非常有力的工具. 我们不需要知道关于 $f(x)$ 的导数的任何信息, 只要找到两个点函数值相等, 就能在中间确认导数零点的存在性.

应用于解题当中, 只要题目中要证明存在某个中间值 ξ, 使得一个等式成立, 那么几乎可以确认就是构造一个辅助函数 $F(x)$, 使得这个等式等价于 $F'(\xi)=0$. 从而只需要找到 F 有两个点函数值相等, 结论就成立了. 当然也有可能是等价于 $F(\xi)=0$, 那就对应使用零点存在性定理即可, 这是前一章的结论了.

问题 9 (2024 期中). *设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 对任意实数 α, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$.*

而对于拉格朗日中值定理, 通常是利用 f' 的上界估计来控制两个函数值之间的差的大小. 比如如果有 $|f'(x)|\le M$ 恒成立, 则由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

因此有

$$|f(b)-f(a)|\le M|b-a|.$$

问题 10 (2018 期中). *设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且对任意 $x\in(a,b)$, 有 $|f'(x)|\le M$. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点, 证明:$|f(a)|+|f(b)|\le M(b-a)$.*

2 关于考试的一些说明

2.1 考试基本情况

期中考试时间是本周四 10 月 30 日上午 10:00-12:00, 地点是理教 207 课室, 随堂考试, 共两个小时, 试卷满分为 100 分. 根据去年情况分析, 题型可能包括判断题, 填空题, 计算题和证明题.

大家会拿到一份试卷, 一份答题纸和足量草稿纸. 答题纸是由 10 张 A4 白纸装订成册, 正反面都可以写, 空白位置充足. 试卷和草稿纸上作答和过程均不得分. 答题纸上所写的内容都会成为判分的依据, 不用抄题, 但需要标注清楚题号.

期中考试占总评的 30%, 平时作业占 30%, 期末考试占 40%.

2.2 一些基本建议

考前的复习以教材, 课后习题和作业题为重, 这部分内容如果完全掌握, 按往年的经验看已经可以取得较高的分数. 这门课程的知识量相比其他高等数学实在有限, 题目类型和套路其实不多, 扎实的基本功一定是最重要的. 对于往年题, 大家不要指望会出现十分类似的题目, 但可以了解一下考试常见的题目类型和解法. 如果时间来不及, 可以至少把往年题答案都看一下, 对考试的风格和给分的思路有个了解.

判断题和填空题以基本概念的考察为主, 技巧难度不会太高, 这部分题目一定要细心认真完成, 而且因为不用书写过程, 一点点的粗心可能就会丢很多分. 尤其不要出现抄答案到答题纸上时的笔误, 我们不可能去揣摩大家是否得到了正确答案. 实在遇到不会的, 一定要随便蒙一个答案, 还是有不小的概率可以蒙对的.

计算题和证明题, 过程的书写要严谨清晰. 题目的难度不一定是单调递增的, 不要因为前面的题目卡住就放弃后面的题目, 尤其如果后面的题有多个小问, 还是可以捡到不少分数. 实在不会的情况下, 建议把跟本题相关的你能想到的东西都写上去, 千万不要因为害怕不对而不写甚至完全留白.

一般来说期中考试总会难度较大一些. 根据教务老师要求, 期末成绩的卷面分不可以更改, 卷子要上交留档四年, 但是期中考试则不然. 去年的情况是, 期中成绩都取卷面分开根号乘 10 计入了总评, 这样下来平均分和中位数都挺高. 大家可以有个心理准备, 但不用太过于担心分数.

考试结束后会立刻组织改卷, 当天下午一定会把卷面分批改出来, 再由老师决定是否需要调分. 一旦调分方式确定 (也可能不调), 助教会尽快公布分数, 不会耽误大家思考是否退课. 改卷的方式是两个平行

班所有老师助教流水线批改, 且都有标准答案和步骤给分的规范, 不会出现不同助教和老师标准不一的情况. 大家考完之后请耐心等待, 不要单独发消息来问自己的分数.

期中考试后到退课之前, 我会让大家核对前五次作业的提交情况和得分, 如果有错漏请及时告诉我. 作业分数最后不会为难大家, 但也希望大家认真完成和提交作业, 至少让老师看到大家的学习态度是认真的.

3 祝大家考试顺利!