2025 秋高等数学 D 第三次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 10 月 14 日

1　第三次作业选讲

1.1　x^x 型极限: 对数法与重要极限法

在极限的计算题中, 一种非常常见的形式是 x^x 型极限, 也就是所要求极限的函数的表达式中, 底数和指数同时含有未知数. 由于形式非常接近第二个重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

一个最自然的思路是使用适当的变形, 将其凑成对应的形式.

问题 1 (习题一第 19 题 (19) 问)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n$.

问题 2 (习题一第 19 题 (20) 问)**.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

问题 3 (习题一第 19 题 (21) 问)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+m}$.

重要极限法.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/4}\right)^{n/4}\right]^4 = e^4.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+m} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^m = e\cdot 1 = e.$$

□

注 1. *在求极限的过程中, 一定要留意哪些字母是变量, 哪些字母是给定的常量. 对于写在 lim 下面的极限变量, 一定不能出现在极限符号的外面. 如第三题部分同学会写成*

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1+\frac{m}{n}} = e^{1+\frac{m}{n}}.$$

这实际上就把极限变量 n 给带到极限符号外面来了, 是绝对不可以的. 答案里无论如何也不可能带着 n.

以上所用的重要极限法虽然自然, 但较为依赖于所要求极限的函数的底数中具有明显的 $1+\dfrac{1}{*}$ 的形式, 而且涉及到指数的运算, 很多时候不方便运用. 下面我们介绍一种几乎是万金油的方法, 也就是取对

数法, 不但应用范围更广, 而且可以一劳永逸消除指数的运算, 而转化为我们熟悉的乘除运算, 从而可以自由叠加无穷小量替换.

取对数法.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{4}{n}=4.$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(-\frac{4}{x}\right)=-4.$$

$$\lim_{n\to\infty} (n+m)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+m}{n}=1.$$

□

根据上节课提到的不定式的五种形式, 我们知道对于 x^x 型极限, 只有底数极限为 1 的情况才需要特殊处理, 所以取完对数后 ln 后面的表达式极限一定是 1, 必然可以通过无穷小量替换 $\ln x\sim x-1$ 把对数去掉. 对数法可以帮助我们解决形式更加一般的函数极限问题.

问题 4 (2023 期中)**.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sin x)^{\tan x}$.

问题 5 (补充题)**.** *设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.*

1.2 间断点: 习题一第 20 题

定义 1. *连续点, 间断点, 第一类间断点, 第二类间断点, 可去间断点, 跳跃间断点, 无穷间断点.*

根据定义, 要判断一个点是连续点还是间断点, 必须充分考虑它在定义域里的位置. 特别地, 如果定义域是分段区间, 而要考虑的点只是一个区间的端点, 只需要看单侧连续性, 这时不可能是跳跃间断点.

问题 6 (习题一第 20 题第 (7) 问)**.** *指出函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的连续区间和间断点类型.*

问题 7 (习题一第 20 题第 (8) 问)**.** *指出函数 $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间和间断点类型.*

1.3 最值定理与中间值定理在证明题中的运用: 习题一第 22 题

定理 1 (最值定理)**.** *连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到它的最大值和最小值.*

定理 2 (中间值定理)**.** *连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值.*

推论 1 (零点存在性)**.** *连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上满足 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有零点.*

推论 2 (值域连续性)**.** *连续函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可以取到最大值与最小值之间的一切值, 因而其值域必为一个连续区间.*

问题 8 (习题一第 22 题第 (2) 问)**.** *如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且无零点, 则 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.*

正确写法 1. 反证法. 假设结论不成立, 则存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0,f(d)<0$. 不妨设 $c<d$, 由中间值定理, 存在 $\xi\in[c,d]$ 使得 $f(\xi)=0$, 与 f 无零点矛盾. 故原结论成立. □

正确写法 2. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 且由中间值定理的推论, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到 $[m,M]$ 中的一切值. 由于 f 无零点, 故 $0 \notin [m,M]$, 即 $m>0$ 或 $M<0$, 即 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$. □

错误写法 1: 这也要证. 因为 $f(x)$ 没有零点, 所以 $f(x) \neq 0$, 所以 $f(x)>0$ 或者 $f(x)<0$. □

错误写法 2: 记号重复. 假设结论不成立, 则存在 a,b 使得 $f(a)>0, f(b)<0$. □

错误写法 3: 依据不足. 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m. 由于 f 无零点, 所以 $m>0$ 或 $M<0$. (一定要写出能取到 $[m,M]$ 中一切值) □

2 第四次作业选讲

2.1 可导的定义: 习题二第 3 题

问题 9 (习题二第 3 题)**.** *若下面的极限都存在, 判别下式是否正确.*

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$*;*

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$*.*

注 2. 本题考查的实际上是判断函数在一点处是否可导的等价方式, 即左边的极限存在是否能判断 f 在 x_0 处可导, 且导数等于该极限值. 因此作答时不能事先假定 $f'(x_0)$ 存在.

错误解答.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\
=&f'(x_0).
\end{aligned}$$

□

注 3. 运用极限的四则运算法则时, 必须时刻注意, 经过转化之后的表达式是否还存在极限.

不严谨的解答. 分类讨论: 当 f 在 x_0 处可导时正确, 理由如下:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\
=&\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)\\
=&f'(x_0).
\end{aligned}$$

当 f 在 x_0 处不可导时错误. □

注 4. *这里有一定的逻辑问题: 必须要说明左边的极限存在能推出 f 在 x_0 处可导, 或者存在一个反例使得左边的极限存在但是 f 在 x_0 处不可导, 否则实际上并没有解决这道题.*

正确解答. (2) 的结论是错误的. 取 $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, 则左边的极限存在:

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ =& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - |\Delta x|}{2\Delta x} = 0. \end{aligned}$$

但是 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不可导, 原式不正确. □

注 5. *一个本质的问题在于, 函数在某一点处的可导性与该点处的取值密切相关, 而函数在某一点处的极限与该点处的取值无关. 所以事实上我们可以任取一个可导函数, 修改其在一个点处的取值, 得到的新的函数就不满足 (2), 因为修改这个取值后左边极限不变, 但右边导数就不存在了 (在该点处甚至不连续).*

2.2 判断分段函数可导性: 习题二第 10 题

问题 10 (习题二第 10 题)**.** *判断函数* $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \le 1 \\ 2x+3 & x > 1 \end{cases}$ *在 $x = 1$ 是否可导.*

错误写法 1: 分不清左右极限和左右导数. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2 + 3 = 5$, 故 f 在 $x = 1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

错误写法 2: 还是分不清左右极限和左右导数. $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$, $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2 + 3 = 5$, 故 f 在 $x = 1$ 处左右导数不相等, 所以不可导. □

注 6. *以上两种错误都是意识到了函数在 1 处不连续, 所以不可导, 但是写法有问题.*

正确解答 1. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2 + 3 = 5$, 故 f 在 $x = 1$ 处左右极限不相等, 不连续, 所以不可导. □

错误写法 3: 左右导数求法不对. $f'_-(1) = \lim\limits_{\Delta x\to0^-} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to0^-} \dfrac{(1+\Delta x)^2 + 1 - 2}{\Delta x} = 2$, $f'_+(1) = \lim\limits_{\Delta x\to0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to0^+} \dfrac{2(1+\Delta x) + 3 - 5}{\Delta x} = 2$, 故 f 在 $x = 1$ 处左右导数相等, 所以可导. □

注 7. *这里看起来出现了矛盾: 一方面根据前面的讨论 f 不连续, 所以不可导; 另一方面直接计算左右导数似乎又是相等的, 符合导数存在的定义. 这里的问题出在计算左右导数时代入的 $f(1)$ 函数值有问题, 算左导数代入了 2, 算右导数却代入了 5.*

2.3 隐函数求导

问题 11 (习题二第 13 题)**.** *求以下方程所确定的隐函数的导数:*

(1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$, *(2)* $\cos(xy) = x$,

(3) $y = 1 + xe^y$, *(4)* $x^y = y^x$.

错误解答. (2) $y = \dfrac{1}{x}\arccos x$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}\arccos x - \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. □

正确解答. (2) $-\sin(xy)(y+xy')=1, y'=\dfrac{1}{x}\Big(-\dfrac{1}{\sin(xy)}-y\Big).$ □

注 8. 不要将方程决定的隐函数求出来然后直接求导, 首先大部分情况这是解不出来的, 其次隐函数的唯一性并不是一件显然甚至正确的事情, 比如 *(1)(2)* 中的隐函数都不唯一, 所以解出来的结果并不严谨, 我们应该掌握直接对隐函数求导的办法.

注 9. 一般来说隐函数求导的结果会带有自变量 x 和隐函数 y 本身, 而 y 本质上又是 x 的函数, 所以经过不同的化简方式会得到形式上不同的表达式. 这是非常自然的, 只要求导过程正确, 一定可以证明这些表达式是等价的, 因此不需要刻意追求形式的简化, 求出来之后直接下结论即可.

问题 12 (习题二第 18 题)**.** 若 $x+2y-\cos y=0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

错误解答. 对 x 求一阶导: $1+2y'+\sin y\cdot y'=0$, 故 $y'=-\dfrac{1}{2+\sin y}$. 两边再对 x 求导得: $y''=\dfrac{\cos y}{(2+\sin y)^2}$. □

注 10. 必须时刻牢记 y 是关于 x 的函数, 很多同学上一题可以做对, 这题求一阶导也都求对, 但是求第二次导数的时候就忘记再乘一个 y', 实际上第二次变成了对 y 求导. 一个可能有帮助的办法是在计算的过程中不写 y, 而是写 $f(x)$, 可以提醒自己这一项也是关于 x 的函数. 但是卷子上最后的结果必须写成带有 y 的形式.

问题 13 (补充题)**.** 设 u, v 关于 x 二阶可导, 令 $y=\arctan\dfrac{u}{v}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.