2025 秋高等数学 D 习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 9 月 30 日

1　第二次作业选讲

1.1　求极限: 习题一第 19 题

在之前的课程中, 我们学习了数列极限的 “$\epsilon - N$ 语言” 定义, 以及函数极限的 “$\epsilon - \delta$ 语言” 定义, 并尝试用定义验证计算了几个基本的极限. 然而, 在实际的题目中, 数列或函数的形式往往十分复杂, 用定义去计算极限已不可能. 在此情况下, 我们需要运用几种常见的处理方式, 将要求极限的数列/函数转化成可以通过四则运算和简单极限求出来极限的形式.

这里我们常用的工具主要有: **恒等变形** (因式分解, 裂项求和, 等差等比数列求和, 三角函数和差化积/积化和差/和角差角倍角公式, 分子/分母有理化等等), **夹逼定理** (最常用于复杂求和公式或极限为 0 的计算), 凑常用极限 (转化为 e 的定义式), **主项分析/无穷大量量级估计** (主要用于数列极限或 x 趋于无穷时的函数极限), **无穷小量/无穷大量替换** (常见于整体为分式但有很复杂的项的情况) 等等. 但是归根结底, 快速准确计算极限的要点在于熟练掌握常见的不等式放缩技巧, 无他, 唯有熟能生巧.

希望大家通过不断地做题和整理, 能够总结出常见的**放缩技巧和量级估计**的结果, 就像高考备考期间针对各种作文题材积累素材一样, 在考场上即使见不到原题, 也可以根据题目出现的各种形式, 针对性地使用最有效的办法. 这才是大家做题的最重要的意义.

最后强调一点, 对于这种较难的极限计算题, 所给的函数基本都是连续函数. 在此情况下, 希望大家养成一个习惯：从一开始每操作一步或化简一步, 都把自变量的极限点代入进去, 只要代入后得到的不是不定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}\right)$, 那么就已经做完了. 即使仍是不定式, 也有可能有一些形式复杂的部分可以被拎出去. 简单的例子: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos(e^x x^2)}$. 虽然带有 cos 的项形式极为复杂, 但当 $x=0$ 时该项 $=1$, 因此根据极限四则运算, 该极限就等于 $\frac{\sin x}{x}$ 的极限. 这有助于大家一步步拨开迷雾见青天. 如果始终想着如何对这一项进行变形或者估计, 那很大概率是做不出来的.

问题 1 (恒等变形)**.** *因式分解: (12)(13). 初始形式分别是 $\frac{0}{0}$ 和 $\infty-\infty$ 形式的不定式, 但通过因式分解可以转化成直接代入可得结果的形式. 注意计算不要出错.*

等差等比求和: (10)(11). 这样的求和可以直接计算, 对于等差等比数列求和的公式一定要熟练记住. (10) 不可以拆成 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+\cdots+0=0$ 来做, 因为求和一共有 n 项, 而 n 是一个趋于无穷的变量, 不能出现在极限过程外面.

分子有理化: (2)(6)(9)(15). 之所以想到分子有理化, 是因为这样可以消除部分或全部的不定式影响: (2)(6) 可以去掉 $\infty-\infty$ 的情况 (注意 $\infty+\infty=\infty$ 不是不定式), (9)(15) 可以去掉 $\frac{0}{0}$ 的情况. 实际解题当中几乎都可以这么做. (9) 需要看清楚趋于 0 的变量到底是什么.

直接代入就能做: (3)(4)(14)(16). 如果不养成直接代入的习惯, 再去做其他变形, 只会多此一举.

问题 2 (夹逼定理)**.** *(8)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}$.

错误写法 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$. (利用极限四则运算时一定要保证拆出来的极限都存在, 否则是错误的写法) □

错误写法 2. 因为 $n^{1/3}\sin n<n+1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}=0$. (分子比分母小不能说明极限是 0) □

错误写法 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1/3}\cdot n}{n+1}=\infty$.(无穷小量替换 $\sin x\sim x$ 要求在 $x\to 0$ 时) □

正确写法. $\left|\dfrac{n^{1/3}\sin n}{n+1}\right|\le\dfrac{n^{1/3}}{n}=n^{-2/3}\to 0$. 故原极限 $=0$. □

注 1. *这实际上就是课本提到的: 有界变量 × 无穷小量 = 无穷小量.*

注 2. *关于正弦函数 sin 的估计方式总结如下:*

(1) 如果 sin 后面的东西是一个存在极限且不等于 $k\pi$ 的量, 根据前述, 直接代入就会产生一个极限非 0 的量, 然后就不需要特殊处理了. 如 $x\to 0$ 时 $\sin(\cos x)\to\sin 1$.

(2) 如果 sin 后面的东西是一个极限为 0 的量, 则由无穷小量替换 $\sin x\sim x$, 可以把 sin 这个量代换为这个量本身. 如果极限是 $k\pi$, 利用诱导公式转化为极限是 0 的情况然后同样代换. 如 $x\to 0$ 时 $\sin x^3\sim x^3$, $n\to\infty$ 时 $\sin\dfrac{1}{e^n}\sim\dfrac{1}{e^n}$.

(3) 如果 sin 后面的东西是一个发散到无穷的量, 我们大概知道这个正弦值会不断在 $[-1,1]$ 之间振荡, 此时一般都只能用 $|\sin|\le 1$ 进行放缩, 因为我们实在没有更好的信息了. 这可以用来处理看起来很可怕的量, 比如 $\sin n,\sin(e^n),\sin(n^2n!)$ 等等, 越是这样复杂的形式, 放缩的方式越有限而标准.

问题 3. *主项分析/无穷大量量级估计: (1)(5)(7). 常见于数列极限或 $x\to\infty$ 的函数极限, 且表达式形式为分式, 分子分母均为无穷大量. 这类问题在动笔计算之前, 关键在于先思考一个问题, 也就是分子分母的增长速度分别是由哪一项 (主项) 控制的. 通常来说如果所求极限存在, 分子分母的主项应该一致 (或相差一个常数倍), 而其他项都是相对于主项来说增长速度更慢的. 此时可以直接分子分母同时除以主项, 其他项则全部变成极限为 0 的无穷小量了.*

思考 1. *常见的无穷大量之间的大小关系: $\ln n<<n^\alpha<<a^n<<n!<<n^n$.*

证明. 分子 $n!$ 中后面一半每一个都 $\le n$, 抵消掉分母中一半的 n:

$$\frac{n!}{n^n}\le\frac{([\frac{n}{2}])!}{n^{[n/2]}}\le\frac{1}{2^{[n/2]}}\to 0.$$

对分母 $n!$ 中 $\le[a]$ 的都放缩成 1, $\ge[a]+1$ 的都放缩成 $[a]+1$:

$$\frac{a^n}{n!}\le\frac{a^n}{([a]+1)\cdots n}\le a^{[a]}\cdot\left(\frac{a}{[a]+1}\right)^{n-[a]}\to 0.$$

对分母 $a^n=(1+(a-1))^n$ 作二项式展开, 只保留 $[\alpha]+1$ 次项:

$$\frac{n^\alpha}{a^n}\le\frac{n^\alpha}{C_n^{[\alpha]+1}(a-1)^{[\alpha]+1}}\to 0.$$

$\ln n << n^\alpha$ (**较为复杂, 选读**): 只需要证明对任意 $\beta > 0$, $\ln n < n^\beta$ 在 n 充分大时成立, 然后就有

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} \leq \frac{n^{\alpha/2}}{n^\alpha} = n^{-\alpha/2} \to 0.$$

而 $\ln n < n^\beta$ 等价于 $n < e^{n^\beta}$. 前面已经证明 $e^n >> n^{1/\beta}$, 所以 $e^{n^\beta} >> (n^\beta)^{1/\beta} = n$. □

思考 2. *常见的无穷小量之间的大小关系: $x, \sin x, \tan x, 1-\cos x, x^\alpha, a^x - 1, \ln(x+1), \arcsin x, \arctan x$.*

1.2 证明题: 补充题第 2 题

问题 4. *设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. 证明: $|a| \leq 1$.*

逻辑关系错误 1. $|x_n| \leq \epsilon, |x_n| \leq |a| \cdot \epsilon \Rightarrow |a| \leq 1$. □

逻辑关系错误 2. $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. □

逻辑关系错误 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} x_n} = a$. (极限四则运算必须保证分母极限不为 0) □

逻辑关系错误 4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow |x_{n+1}| \leq |x_n|$ 或者 $|x_n|$ 必然单调递减收敛到 0. □

逻辑关系错误 5. $|x_n|$ 单调递增 $\Rightarrow |x_n|$ 发散到无穷/没有上界, 或者 $\Rightarrow |x_n|$ 不可能收敛. □

注 3. *证明题的过程书写中很重要的一环是因果关系和逻辑推导. 所有过程中得到的中间结论, 都必须严格写清楚是从什么条件或者什么定理得到的, 并且确实真的可以得到. 并不是说我从条件中推出几个正确的结论, 然后说所以最终结论成立, 这个证明就是对的; 也并不是说只要我推出的结论在这个题里确实成立, 那么推导就没有问题.*

比如上面提到的逻辑关系错误 5, 如果通过合理取 ϵ 得到, 当 n 充分大时 $|x_{n+1}| \geq \frac{|a|+1}{2}|x_n|$, 再通过反证法假设 $|a| > 1$ 以及等比数列公式, 确实可以证明 $|x_n|$ 会发散到无穷, 从而导出矛盾. 但是如果只说 $|x_n|$ 递增, 并不能得到发散的结论, 因为当然存在递增数列收敛的例子. 任何的结论都必须真的能从前一步严格推导出来.

注 4. *以上的几种错误在去年和今年的作业批改中屡见不鲜. 其实如果单独作为判断题让大家做, 几乎所有的同学都能判断出其中的错误, 但是自己写证明的时候往往意识不到, 或者推到这一步发现推不出想要的结论, 却没有去更换前面的思路, 而是将错就错. 如果是因为意识不到, 希望大家以此机会提醒自己, 比如数列收敛本身不能推出任何跟单调性有关的东西; 如果是因为将错就错, 考场上无奈之下可以以此争取更多的分数, 但在平时作业中还是要多去思考正确的解答.*

证明. 反证法. 假设 $|a| > 1$, 由条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$ 知, 对 $\epsilon = \frac{|a|-1}{2} > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时都有

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - a\right| < \epsilon.$$

从而

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq |a| - \epsilon = \frac{|a|+1}{2} > 1.$$

因此当 $n > N$ 时总有 $|x_{n+1}| > |x_n|$, 特别地, 当 $n > N+2$ 时总有 $|x_n| > |x_{N+2}| > |x_{N+1}| \geq 0$. 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \geq |x_{N+2}| > 0$, 与 $x_n \to 0$ 矛盾. 假设不成立, 原命题得证.

或可以具体计算得到当 $n > N$ 时:

$$|x_n| \geq \left(\frac{|a|+1}{2}\right)^{n-N-1} |x_{N+1}|,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, 与 $x_n \to 0$ 矛盾. □

1.3 证明题: 补充题第 3 题, 第 4 题

问题 5. *设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$. 请用 $\epsilon - \delta$ 语言证明: $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$.*

问题 6. *设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$. 请用 $\epsilon - \delta$ 语言证明: $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 x_0 附近有界.*

思考 3. *函数有界, 有上界, 有下界的定义分别是什么.*

逻辑关系错误 1. $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon \Rightarrow \dfrac{1}{A-\epsilon} < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{A+\epsilon}$. □

逻辑关系错误 2. $|f(x)| \leq A \Rightarrow \dfrac{1}{|f(x)|} \leq A$. □

自行增加条件. 假设 $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = B$, 则 $B^2 = A$. □

证明. 由极限保号性知存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时总有 $f(x) > 0$. 此时 $\sqrt{f(x)}$ 有合理定义.

对任意 $\epsilon > 0$, 由条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时总有 $|f(x) - A| < \sqrt{A}\epsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ 时总有

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{A}| = \frac{|f(x) - A|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{A}} \leq \frac{\sqrt{A}\epsilon}{\sqrt{A}} = \epsilon,$$

故所求极限成立. □

证明. 不妨设 $A > 0$, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 对 $\epsilon = \dfrac{A}{2} > 0$, 由条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时总有

$$|f(x) - A| < \epsilon = \frac{A}{2},$$

即 $f(x) > \dfrac{A}{2} > 0$. 故此时 $0 < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{2}{A}$, 即 $\dfrac{1}{f}$ 在 x_0 附近有界. □

1.4 证明题: 补充题第 6 题

问题 7. *若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = B$, 且 $B \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.*

本题难度较大, 但题目条件和结论形式均比较简单, 所以思路基本上是固定的, 与补充题第 3 题大致相同, 就是利用绝对值不等式对 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{A}{B}\right|$ 进行放缩, 用 $|f(x) - A|$ 和 $|g(x) - B|$ 来进行控制. 其实这样的思路是几乎所有抽象证明题以及用定义证明极限的通法: 就是通过不等式放缩, 将目标函数与目标极限的差的绝对值, 转化为已知函数与已知极限的差的绝对值, 或者转化为 $|x - x_0|$(函数极限) 或者关于 n(数列极限) 的直接的表达式.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{Bf(x)-Ag(x)}{Bg(x)}\right|.$$

在放缩过程中要时刻记住: 我们是要希望这个量小于任给的一个很小的 ϵ, 所以不能放缩过头, 特别地, 最极端的情况是把 $f(x)$ 换成 A, 把 $g(x)$ 换成 B, 这个表达式要等于 0. 否则一定是放过头了.

前面提到我们希望用 $|f(x)-A|$ 和 $|g(x)-B|$ 来进行控制 (这两个相当于是已经有人跟上帝玩过这两把游戏并且通关了, 现在轮到我们来玩, 由于我们对抽象函数一无所知, 所以需要借助前人的成功经验), 所以对分子进行一个常见的加一项减一项放缩:

$$|Bf(x)-Ag(x)|=|Bf(x)-AB+AB-Ag(x)|\le|B|\cdot|f(x)-A|+|A|\cdot|g(x)-B|.$$

现在我们借助前人的成功经验, 对于任给的 $\epsilon>0$, 存在 $X>0$ 使得当 $x>X$ 时总有 $|f(x)-A|<\epsilon, |g(x)-B|<\epsilon$, 从而此时分子已经被控制住为一个小量. 现在我们只需要确定分母 $|B||g(x)|$ 有没有大于等于什么常数就可以了. 由条件 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$, 且 $B\neq0$, 则存在 $X_1>0$ 使得当 $x>X_1$ 时总有 $|g(x)-B|<\dfrac{|B|}{2}$, 即 $|g(x)|\ge\dfrac{|B|}{2}$. 所以当 $x>\max(X,X_1)$ 时总有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|\le\frac{|B|\epsilon+|A|\epsilon}{|B|^2/2}=\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\epsilon.$$

这就证明了结论.

注 5. *很多同学采用了分解 $f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta$, 其中 α,β 都是无穷小量, 这样就只要证 $\dfrac{B\alpha-A\beta}{Bg(x)}$ 也是无穷小量. 这是一个很好的思路, 但是要注意此时我们应用的是 “有界变量 × 无穷小量 = 无穷小量”, 而不是 “无穷小量 / 有界变量 = 无穷小量”, 所以下面需要证明的是 $\dfrac{1}{Bg(x)}$ 有界, 而不是 $Bg(x)$ 有界. “无穷小量 / 有界变量 = 无穷小量” 一般来说并不成立.*

总体来说本次作业的补充证明题难度较大, 对于初学的同学们来说并不容易, 结合我个人的经验来看, 非数学专业的同学们往往对证明题具有天然的恐惧. 从普遍情况来看, 计算题主要涉及的技巧较为单一, 并且始终出现的是有具体形式的函数, 大家在中学阶段已经见得比较多了, 所以即使涉及到新的知识和技巧, 相对来说也更好处理一些. 而证明题通常涉及抽象函数性质的直接逻辑推导, 几乎没有任何具体形式的函数可以操作, 加上对知识和技巧的融会贯通和灵活运用要求更高, 所以更容易出现综合难度较大的情况.

根据往年经验, 本次作业证明题的思维难度已经足以覆盖考试的难度, 当然这并不是说会了这六道题考试就没有问题. 一方面, 这些题目确实难度较大, 大家一时无法完全吸收理解, 或者觉得出现类似的题目还是不会做, 都属正常; 另一方面, 也希望大家如果想攻克证明题这一关, 在假期回来考试之前, 反复去回顾和书写这几道题的过程, 体会其中比较核心的证明思想和放缩技巧, 直到让它们成为一种自然的想法. 同时结合书上的证明和学习指导书上的补充题, 多积累自己的武器库.

此外, 无论是希望进一步地理解课本内容, 还是提升自己对证明题思路的理解, 都非常推荐大家阅读一下谢彦桐学长撰写的非常经典的高数习题课讲义 (文件我会发在群里, 我的主页上也有链接). 虽然这份讲义是高数 B 的参考资料, 但其中部分内容跟我们课程要求是一致的. 特别推荐 “序列极限讲义” 部分的 1.1 和 1.2 两节内容.

2 祝大家假期快乐!