2025 秋高等数学 D 第一次习题课讲义

数学科学学院　冯宣瑞　2401110009

2025 年 9 月 16 日

1　准备内容

1.1　助教信息

冯宣瑞　数学科学学院 2024 级博士生
学号: 2401110009
手机/微信: 13632208341
研究方向: 基础数学-偏微分方程
助教经历: 2024 秋高等数学 D (公共数学课十佳助教), 北大问学高数衔接课第一部分
邮箱 (可以邮件询问/答疑): pkufengxuanrui@stu.pku.edu.cn
个人主页 (可以找到课程资料): fengxuanrui.github.io

1.2　课程信息

正课时间: 1-16 周每周, 周二 1-2 节, 周四 3-4 节.
正课地点: 周二理教 208, 周四理教 207.
习题课时间: 1-16 周双周, 周二 10-11 节.
习题课地点: 理教 409.
评分标准: 作业 30 分 + 期中考试 30 分 + 期末考试 40 分.
期中考试时间: 2025 年 10 月 30 日周四 3-4 节 (暂定).
期中考试地点: 待定.
期末考试时间: 2026 年 1 月 1 日周四上午 8:30-10:30(暂定).
期末考试地点: 待定.

1.3　关于答疑

线下答疑: 双周周二习题课课后, 理教 409.
线上答疑: 微信/邮件.
注意事项:

- 线上答疑的消息或者邮件我可能不一定能及时回复, 但一般来说 24 小时内我一定会回答. 在必要的情况下我会使用语音回复, 这样也更容易讲清楚思路, 我会尽量使用合适的语速. 如果问题较多, 也可以习题课后或者另约时间找我线下答疑.

- 答疑的内容可以包括不清楚的课程信息, 不懂的知识点, 不会做的题目等. 如果涉及到具体的题目请提供出处. 请尽量不要让我逐行检查某一个计算或证明是否正确或者哪里出错, 如果必要的话, 请至少保证书写的工整. 请不要询问过于宏大或者抽象的问题, 比如 "如何学好高数".

1.4 关于习题课

内容: 评讲作业 + 重点难点知识回顾 + 补充习题 + 课后答疑. 基础为重, 不会进行超纲的拓展.

不计考勤, 允许不影响他人的迟到早退, 不占分数. 如果有事无法上课或者想听其他助教的习题课, 可以自行决定, 这一规则对我们三个习题课班都适用. 课上有任何问题可以随时举手提问.

1.5 关于作业

评分标准: 每次作业满分 100 分, 错 0-2 题不扣分, 错 3-4 题 95 分, 依此类推, 最后加起来折合成 30 分计入课程总评. 如果某次作业的题目过难, 会进行适当调整, 总体来说作业打分主要看大家的完成态度, 不会在这一项分数上为难大家. 请大家认真准备好两次考试.

提交方式: 正课提交纸质版作业, 习题课或正课发回. 作业提交时请注意与其他习题课班的同学的作业分开摆放 (我们也会到场组织秩序), 一般来说我会在习题课发回作业, 正课收作业时也会带上, 请大家及时取回.

作业规范: 每次作业请标注清楚姓名学号和作业次数. 无需抄题, 但是需要标注清楚题目的序号, 请尽量按照老师布置的顺序写解答, 不会做的题目可以空出来或者写部分解答, 也可以标注上自己的疑点. 请保持基本的书写工整和版面清晰. 最好使用 A4 大小左右的纸张书写, 本子可能不方便携带, 而且无法顺利进行收发衔接, 而纸张过大或者过小也可能不方便携带和保存.

1.6 说在前面的话

2 函数的定义与基本性质回顾

2.1 如何认识函数的概念

中学时期我们已经接触过许多常见的函数, 比如指数函数 $f(x) = a^x$, 对数函数 $f(x) = \log_a x$, 幂函数 $f(x) = x^\alpha$, 三角函数 $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \tan x$ 等等. 这些函数都有着简单具体的形式, 同时也是最重要的几种函数, 在中学的学习中我们针对这些具体的函数发展了许多技巧, 大部分同学结束高考不久, 想必还比较熟悉.

但是, 无论在科学研究还是在生产生活中, 函数所代表的变量之间的相互关系是多种多样的, 我们不可能生活在一个只包括上述几种函数的世界当中. 所以在高等数学中, 我们需要对抽象的未知函数进行系统的研究, 甚至从研究某一具体的函数转变成研究具有某一抽象特征的函数 (周期性, 凹凸性, 单调性, 连续性等等).

在研究这些性质之前, 我们首先要弄清楚什么是函数. 大家此前往往将函数与它的图象等同起来, 说到 $\sin x$ 就会想到正弦波的样子, 说到 x^2 则会想到一条向上开口的抛物线. 这样的几何直观当然有利于理解这些特殊函数的性质, 但对于抽象函数, 图象并不能给予我们足够的信息, 部分信息也不能反映在图象上 (下面会提到存在一个画不出图象的函数), 更不用说对于多元函数, 我们是无法想象高维空间中的图象的. 所以我们需要建立起一个新的认知: **函数就是一个映射, 一个作用机制, 一台吃进去 x 变出来 $f(x)$ 的机器** (函数的原文 function 本来就是作用的意思).

2.2 周期函数

定义 1. *周期, 周期函数, 最小周期.*

问题 1. *指出下列函数中哪些是周期函数, 哪些不是; 若是周期函数, 指出其周期.*

(1) $y = \sin ax\,(a > 0)$. (2) $y = 4$. (3) $y = \sin 2x + \sin \pi x$. (4) $y = \sin x + \cos x$.

注 1. *在未加说明的情况下, 应当指出其全部周期.*

以上的函数仍然是我们熟悉的几种具体函数作四则运算可以得到的, 并没有跳出中学数学处理问题的框架, 大家只需熟悉周期的定义即可. 但我们前面已经提到, 函数的本质是一个作用机制, 所以所谓周期函数, 不只是说它的图象呈现周期性变化, 更重要的是其定义 $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 也就是说, f 把距离为 T 的两个 x 打到同一个 y 上.

思考 1. *指出以下定义的 Dirichlet 函数的全部周期.*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

注 2. *面对无法画出图象观察, 且并不熟悉的函数时, 要研究它的周期 (乃至任何性质), 都必须回到基本的定义. 大家要习惯这种跳出几何直观, 回归基本定义的思考方式.*

有时即使是熟悉的函数之间的复合, 我们也没有办法通过简单的观察得到它们的性质, 最后还是要落在回归定义这一步.

思考 2. *证明 $f(x) = \cos x^2$ 不是周期函数.*

注 3. *对于周期性这种非常强的性质, 如果要证明某个函数不满足这一性质, 通常都是使用反证法, 然后利用周期性推导矛盾.*

2.3 反函数

反函数是一个相对抽象的概念. 中学时期大家可能熟悉的定义是图象沿着 $y = x$ 直线作对称. 但对于一般的函数, 我们怎么样思考它的反函数的机制, 或者如何利用映射的观点来思考什么是反函数.

前面我们提到, 一个函数 f 就是一台机器, 喂给它一个自变量 x, 它就会根据自己的作用机制变出来一个函数值 $y = f(x)$. 那么它的反函数 f^{-1} 就可以看成是一台反向的机器, 它负责把这个 $y = f(x)$ 吃进去, 变出来原来这个 x. 当然这里有一个要求就是, 原来的机器 f 是单射, 也就是不会把两个不同的 x_1 和 x_2 都变成同一个 y, 不然的话这个反向的机器就会故障, 因为它不知道要变出来 x_1 和 x_2 中的哪一个了.

如何求 $y = f(x)$ 的反函数: 到底是先互换 x 和 y 的位置, 还是先解方程, 要做哪步不要做哪步. 这些问题或许曾经困扰过大家, 但是一旦我们想清楚了下面这些事情, 就会轻松很多: 函数就是一个作用机制, 而 x 和 y 其实只是代表 f 这台机器的原料和产物的两个符号, 它们之间并没有天然的函数关系, 反函数的身份就是以 f 的产物为原料, 以 f 的原料为产物的一台反向机器. 所以互换 x 和 y 的位置, 就相当于改用 x 表示 f 的产物, 也就是 f^{-1} 的原料 (自变量), 用 y 表示 f 的原料, 也就是 f^{-1} 的产物 (因变量). 解方程也就是确定反向机器的具体形状. 这两步的先后顺序可以互换.

问题 2. *已知 $f(x) = x + 1$, 求 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.*

错误解答. 由于 $f(x)=x+1$, 所以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+1$. 令 $y=\dfrac{1}{x}+1$, 则 $x=\dfrac{1}{y-1}$. 所以

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}.$$

□

正确解答. 令 $y=x+1$, 则 $x=y-1$, 即 $f^{-1}(x)=x-1$. 代入 $\dfrac{1}{x}$ 得

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-1.$$

□

注 4. 错误解答中求出来的实际上是 $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 这个函数的反函数, 而题中所求则是 $f(x)$ 的反函数代入 $\dfrac{1}{x}$ 这个自变量得到的函数.

思考 3. 如何确定反函数的定义域.